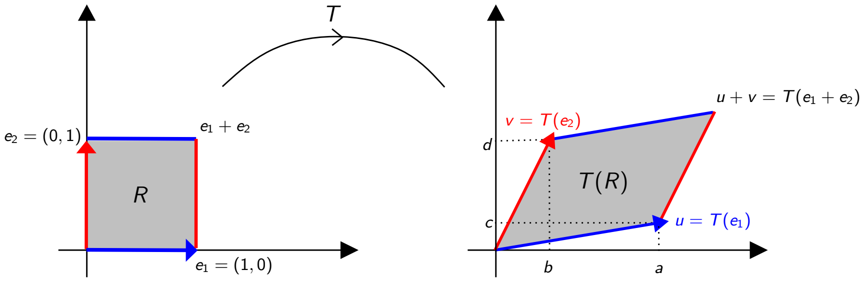
Motivação do determinante: caso das matrizes 2×2

- Consideremos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por uma matriz $A_{2\times 2} = [\,u\ v\,] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, isto é, $T(x) = Ax$.
- Tem-se $T(e_1) = u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $T(e_2) = v = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ e pode-se mostrar que T envia o quadrado unitário R no paralelogramo $T(R)$ definido por u e v,



- O determinante da matriz A é como veremos,

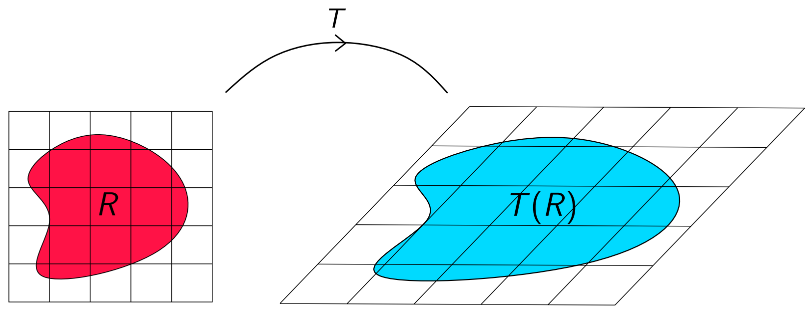
$$\det(A) = ad - bc,$$

e verifica a propriedade (ver o exercício 36 da sebenta),

$$\boxed{\text{área de } T(R) = |\det(A)| \ \times\ \text{área de } R = |\det(A)|.}$$

Extensão a outras de regiões do plano

- A propriedade anterior estende-se a outras regiões R do plano com "boas propriedades":



- Aproximando sucessivamente a área de uma região R usando uma grelha cada vez mais fina e aplicando a fórmula do slide 193 às áreas das imagens dos quadrados dessa grelha, mostra-se que se tem

$$\boxed{\text{área de } T(R) = |\det(A)| \ \times\ \text{área de } R.}$$

Desafio

A partir da área do circunferência de raio 1 deduza a fórmula da área de uma elipse de semi-eixos a e b, aplicando uma transformação linear conveniente.

Motivação do determinante: caso das matrizes 3×3

- Considerando agora a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por uma matriz $A_{3\times 3} = [\, u \;\, v \;\, w \,]$, tem-se que o valor absoluto do determinante de A verifica a relação análoga,

$$\boxed{\text{volume de } T(R) = |\det(A)| \;\times\; \text{volume de } R = |\det(A)|,}$$

  onde R é o cubo unitário definido pelos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ (cujo volume é 1) e $T(R)$ o paralelipípedo definido pelos vetores u, v e w, obtido como imagem por meio de T de R.

- Esta relação pode ser estendida a regiões do espaço R mais gerais com "boas propriedades", tendo-se ainda

$$\boxed{\text{volume}(T(R)) = |\det(A)| \;\times\; \text{volume}(R).}$$

- A expressão para o determinante de uma matriz quadrada A de ordem 3 é mais complicada e será dada mais adiante no slide 198.

Determinante de matrizes de ordem ≤ 2

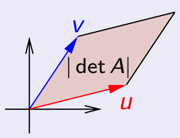
- Se $n = 1$, define-se,

$$\det\,[a] = a.$$

- Se $n = 2$, define-se,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 2×2



Recordemos que o valor absoluto do determinante de

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\, u \;\; v \,], \text{ com } u = (a, c) \text{ e } v = (b, d),$$

corresponde à área do paralelogramo definido por u e v. Esta área é não nula se e só se u e v são não colineares!

Determinante de matrizes de ordem 2 - exemplo

Por exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é,

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$$

e em particular, o paralelogramo definido pelos vetores $u = (1, 3)$ e $v = (2, 4)$ tem área 2.

Determinante de matrizes 3×3: regra de Sarrus

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

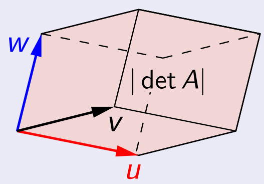
Por exemplo,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = 1 \times 1 \times 1 + 0 \times 1 \times (-1) + (-2) \times 2 \times 3$$

$$- ((-2) \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 3 + 0 \times 2 \times 1) = 1 + 0 - 12 - (2 + 3 + 0) = -16 \neq 0$$

Determinantes 3x3

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 3×3



Recordemos que o valor absoluto do determinante da matriz $A = [\, u \;\; v \;\; w \,]_{3\times 3}$ com $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ corresponde ao volume do paralelipípedo definido por u, v e w, tendo-se que este volume é não nulo se e só se o paralelipípedo for não degenerado, ou seja, u, v, w forem não complanares.

- Por exemplo, o paralelipípedo definido pelas 3 colunas da matriz A do slide anterior, $u = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $w = (-2, 1, 1)$, tem volume 16.
- A regra de Sarrus só se aplica a matrizes 3x3!
- E no caso geral de matrizes $n \times n$, com n arbitrário?

Menores e co-factores

Definições de menor complementar e co-factor

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $1 \leq i, j \leq n$.

- Chama-se *menor complementar da entrada (i, j)*, denotado por A_{ij}, ao determinante da submatriz que se obtém eliminando a linha i e a coluna j de A.
- Chama-se *complemento algébrico ou co-factor da entrada (i, j)* a

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Por exemplo, o menor complementar da entrada $(1, 2)$ de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, é o determinante da submatriz que se obtém eliminando a linha 1 e coluna 2 de A, isto é,

$$A_{12} = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \times 1 - 3 \times (-1) = 3,$$

e o co-factor da entrada $(1, 2)$ é $\Delta_{12} = (-1)^{1+2} A_{12} = (-1) \times 3 = -3.$

Regra de Laplace

Teorema (Regra de Laplace)

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Então

- Para qualquer $i = 1, \ldots, n$, tem-se
$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$$
(Expansão do det. ao longo da linha i)

- Para qualquer $j = 1, \ldots, n$, tem-se
$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$$
(Expansão do det. ao longo da coluna j)

- A regra de Laplace reduz o cálculo do determinante de uma matriz $n \times n$ ao cálculo de n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$.
- Devem escolher-se linhas ou colunas com o maior número possível de zeros.
- O resultado não depende da escolha da linha ou da coluna.

Regra de Laplace: exemplo 3×3

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- Expandindo o determinante ao longo da 2ª linha tem-se,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} = 0(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \\ & \quad 2(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 3(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 2 \times (1+3) - 3 \times 0 = 8. \end{aligned}$$

- Expandindo o determinante ao longo da 1ª coluna tem-se,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} = 1(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \\ & \quad 0(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 1 \times (2-6) + 0 + (-1) \times (-6-6) = 8. \end{aligned}$$

Regra de Laplace: exemplo 4×4

Exercício na aula

Calcular o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolução: aplicando a regra de Laplace ao longo da terceira linha que possui 2 zeros, obtém-se:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} + a_{34}\Delta_{34} \\ &= 2\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 1\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2(-4) + 0 + 1 \cdot 2 + 0 = -6. \end{aligned}$$

TPC: confirme os valores dos 2 determinantes 3×3 do cálculo anterior, usando a regra de Sarrus no primeiro e a regra de Laplace no segundo.

Consequências da regra de Laplace

Tem-se (ver o exercício 38 da sebenta):

- Se A possui uma linha ou uma coluna de zeros então $\det A = 0$.
- Se A possui linhas ou colunas múltiplas entre si então $\det A = 0$.
- Se A é uma matriz triangular superior (ou inferior) então $\det A =$ produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Em particular,

- $\det\left(\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)\right) = \det \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$
- $\det(\alpha I_n) = \det\left(\operatorname{diag}(\alpha, \ldots, \alpha)\right) = \alpha^n.$
- $\det I_n = 1.$