Capítulo 5

Valores e vetores próprios

EXERCÍCIO 42. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que $(1,5,10)$ é vetor próprio.

De facto, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ (com valor próprio $\lambda = 6$).

b) Verifique que 1 é valor próprio.

De facto, $p_A(1) = \det(A - I) = 0$ pois tem uma coluna de zeros.

EXERCÍCIO 43. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e determine os vetores próprios associados a -1.

De facto, $p_A(-1) = \det(A - (-1)I) = \det(A + I) = 0$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são os múltiplos não nulos do vetor $(0,1,1)$.

EXERCÍCIO 44. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A dimensão do subespaço próprio $E(\lambda)$ associado a um valor próprio λ é $m.g.(\lambda)$ e os vetores próprios associados a λ são os vetores não nulos de $E(\lambda)$, isto é, os vetores não nulos dos espaços gerados pelas respectivas bases, indicadas a seguir:

A:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	1	1	$\{(-1,1)\}$
2	1	1	$\{(1,0)\}$

B:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$-i$	1	1	$\{(-i,1)\}$
i	1	1	$\{(i,1)\}$

C:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	3	1	$\{(0,0,1)\}$

D:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(1,0,0)\}$
6	1	1	$\{(1,5,10)\}$

E:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$1-2\sqrt{2}$	1	1	$\{(\sqrt{2},-1,1)\}$
1	1	1	$\{(0,1,1)\}$
$1+2\sqrt{2}$	1	1	$\{(-\sqrt{2},-1,1)\}$

F:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
2	2	2	$\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$
4	1	1	$\{(1,1,0)\}$

G:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-2	1	1	$\{(0,0,1,0)\}$
1	2	1	$\{(1,0,0,0)\}$
2	1	1	$\{(0,0,0,1)\}$

EXERCÍCIO 45. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero.

$a = 1$

b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.

Para $a = 1$ os valores próprios de A são $\lambda = 0$ com $m.a.(0) = 1$ e $\lambda = 2$ com $m.a.(2) = 2$. Os vetores próprios associados a $\lambda = 0$ são os múltiplos não nulos de $(-1, 1, 0)$ e vetores próprios associados a $\lambda = 2$ são os múltiplos não nulos de $(0, 1, 1)$.

c) Discuta, em função do parâmetro a, a invertibilidade da matriz A.

Para $a \neq 1$ é invertível e para $a = 1$ é singular

EXERCÍCIO 46. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A.

a) Mostre que, para todo o real α, v é um vetor próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado.

O valor próprio associado é $\lambda - \alpha$.

b) Mostre que, para todo o inteiro n, v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado.

O valor próprio associado é λ^n.