Propriedades do determinante

Proposição

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- $\det(AB) = \det A \det B$.
- $\det(A^T) = \det A$.
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$!

Atenção: em geral, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$!

- Para vermos a razão pela qual o 1º ponto faz sentido vamos admitir que A e B têm ordem 2. Se T_A e T_B são as transformações lineares definidas por A e B, R é o quadrado definido pela base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $S = T_B(R)$ a imagem deste quadrado por T_B, tem-se (ver os slides 193 e 78),

$$\begin{aligned} |\det(AB)| &= \text{área de } T_{AB}(R) = \text{área de } (T_A \circ T_B)(R) \\ &= \text{área de } T_A(T_B(R)) = \text{área de } T_A(S) \\ &= |\det A| \times \text{área de } S = |\det A|\,|\det B|. \end{aligned}$$

- O 3º ponto é consequência do 1º ponto e dos resultados do slide anterior:

$$\det(\alpha A) = \det(\alpha(I_n A)) = \det((\alpha I_n) A) = \det(\alpha I_n) \det A = \alpha^n \det A.$$

Determinante e inversa

- Vimos antes que o valor absoluto do determinante de uma matriz 2×2 [3×3] correspondia à área do paralelogramo [volume do paralelipípedo] definido pelas colunas dessa matriz.

- Logo o determinante dessa matriz é não nulo se e só se as suas colunas forem não colineares [não complanares], isto é, definirem um conjunto linearmente independente de vetores, ou seja, A for invertível.

- Tem-se um resultado análogo para matrizes quadradas de ordem arbitrária, como veremos no próximo slide.

Invertibilidade de uma matriz e determinante

Teorema

Seja $A = [\, v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_n \,]$, com $v_i \in \mathbb{R}^n$, uma matriz quadrada de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

- A é invertível.
- $\mathrm{car}(A) = n$.
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.
- $\det(A) \neq 0$.

Nas condições anteriores tem-se ainda,

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.}$$

Para deduzir $\det(A^{-1})$ basta notar que pelo primeiro ponto do slide 205,

$$1 = \det I_n = \det(A\,A^{-1}) = \det A \, \det(A^{-1}).$$

Valores e vetores próprios - motivação

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- Tem-se:

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Logo a transformação linear definida por A, $T(x) = Ax$, induz uma contração de razão $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ na direção do eixo do x_1 e uma dilatação de razão $\lambda = 2$ na direção da bisssectriz dos quadrantes ímpares $x_2 = x_1$.
- Logo 1º eixo coordenado é **invariante** por ação da transformação definida A e qualquer vetor diretor u deste eixo (por exemplo $u = (1, 0)$) verifica a relação $Au = \frac{1}{2}u$, dizendo-se nessa altura que u é um **vetor próprio** de A associado ao **valor próprio** $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.
- Analogamente, a bissectriz dos quadrantes ímpares é **invariante** por ação da transformação definida A e qualquer vetor diretor v desta bissectriz (por exemplo, $v = (1, 1)$), verifica a relação $Av = 2v$, dizendo-se nessa altura que v é um **vetor próprio** de A associado ao **valor próprio** $\lambda_2 = 2$.

Conceitos de vetor e valor próprio

Definições de vetor próprio e valor próprio

Sejam A matriz quadrada de ordem n, $v \in \mathbb{R}^n$ com $v \neq \vec{0}$.
Diz-se que v é um vetor próprio de A se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{Av = \lambda\, v}$$

λ designa-se por valor próprio associado ao vetor próprio v

Exemplo

Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se que $v = (1, 1, 1)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 2$ uma vez que,

$$A\,v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\,v$$

Polinómio característico de uma matriz

Observação

Se A é uma matriz quadrada A de ordem n e λ uma variável, a expressão $\det(A - \lambda I)$ define um polinómio de grau n na variável λ, que se designa por polinómio característico de A e se denota $p_A(\lambda)$.

A importância do polinómio característico fica evidente pelo próximo resultado.

Teorema

Tem-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio de uma matriz quadrada A se e só se $p_A(\alpha) = 0$, isto é, α for raíz do polinómio $p_A(\lambda)$.

Demonstração: $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio de uma matriz A $\Leftrightarrow$ existe um vetor próprio $v \neq \vec{0}$ tal que $Av = \alpha v \Leftrightarrow Av - \alpha v = \vec{0} \Leftrightarrow$ $(A - \alpha I)v = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \alpha I)x = \vec{0}$ admite uma solução $v \neq \vec{0} \Leftrightarrow$ $(A - \alpha I)$ não invertível $\Leftrightarrow p_A(\alpha) = \det(A - \alpha I) = 0$. $\square$

Exemplo

Exemplo

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e vejamos que $\lambda = 2$ é valor próprio de A como se concluiu no slide 209. De facto, tem-se

$$\begin{aligned} p_A(2) &= \det(A - 2I) = \det\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right| \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

uma vez que a matriz possui uma linha de zeros.

Multiplicidade algébrica de um valor próprio

Observação

Pelo teorema do slide 210 os valores próprios de uma matriz A de ordem n são as raízes (reais e complexas) de $p_A(\lambda)$ (que podem ser repetidas).

Definição de multiplicidade algébrica de um valor próprio

Chama-se multiplicidade algébrica de um valor próprio λ, denotada m.a.(λ), ao número de vezes que λ aparece repetido como raíz na factorização de $p_A(\lambda)$.

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$. Tem-se,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Logo $p_A(\lambda)$ admite apenas raíz dupla $\lambda = 3$ e portanto A tem apenas o valor próprio $\lambda = 3$ com multiplicidade algébrica 2 (m.a.(3)=2).

Subespaço próprio e multiplicidade geométrica

Definição de subespaço próprio e multiplicidade geométrica

Sejam A matriz quadrada de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$ valor próprio de A. Chama-se subespaço próprio de A associado a λ ao subespaço vetorial,

$$E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

A dimensão de $E(\lambda)$ designa-se por multiplicidade geométrica de λ e denota-se por $\text{m.g.}(\lambda)$.

Teorema

Os vetores próprios de A associados a um dado valor próprio λ de A são os vetores não nulos do subespaço próprio $E(\lambda)$.

Demonstração: de facto,

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^n \text{ é vetor próprio de } A \text{ associado a } \lambda \quad &\Leftrightarrow \quad Av = \lambda v, \ v \neq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v = \vec{0}, \ v \neq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \mathcal{N}(A - \lambda I) \setminus \{\vec{0}\}. \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo do slide 209 revisitado

Vamos aplicar os conceitos dos slides anteriores à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Tem-se,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}}_{\text{Laplace na } 1^{\text{a}} \text{ coluna}} \\ &= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} + 0 + 0 \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

- $p_A(\lambda)$ admite portanto a raíz dupla $\lambda = 1$ uma vez que aparece repetida 2 vezes na factorização do polinómio e a raíz simples $\lambda = 2$.
- Logo A admite valores próprios distintos, $\lambda = 1, 2$, com $\text{m.a.}(1) = 2$ e $\text{m.a.}(2) = 1$.

Exemplo do slide 209 revisitado (cont.)

Relativamente ao subespaço próprio $E(1) = \mathcal{N}(A - I)$ tem-se:

- Aplicando o método de Gauss vem,

$$\left[\, A - I \mid \vec{0} \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ e portanto,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A - I) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = 0, x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \big\langle (1,0,0), (0,0,1) \big\rangle. \end{aligned}$$

- Logo $E(1) = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$. Uma base para $E(1)$ é portanto $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$, tendo-se $\text{m.g.}(1) = \dim E(1) = 2$.
- Geometricamente $E(1)$ define o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetores diretores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.
- Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 1$ são os vetores não nulos de $E(1)$. Por exemplo, tomando $x_1 = 1$ e $x_3 = -2$ obtém-se o vetor próprio $(1,0,2)$ de A associado a $\lambda = 1$.

Exemplo do slide 209 revisitado (concl.)

Relativamente ao subespaço próprio $E(2) = \mathcal{N}(A - 2I)$ tem-se:

- $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$
- Aplicando o método de Gauss ao sistema $\left[\, A - 2I \mid \vec{0} \,\right]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

- Logo, $E(2) = \mathcal{N}(A - 2I) = \{(x_3, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \big\langle (1,1,1) \big\rangle$, e uma base para $E(2)$ é $\{(1,1,1)\}$, tendo-se $\text{m.g.}(2) = \dim E(2) = 1$.
- Geometricamente $E(2)$ é a reta que passa na origem com vetor diretor $(1,1,1)$.
- Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são os vetores não nulos de $E(2)$, isto é, os vetores da forma (a, a, a) com $a \neq 0$.

A informação, dita **espectral** sobre a matriz A pode ser organizada numa tabela

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0), (0,0,1)\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$

Só para relembrar :)

Resumo

- Reconhecer / verificar que $v \neq \vec{0}$ é vetor próprio de A
  $\longrightarrow$ Mostrar que $Av = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.
  λ é o valor próprio associado a v.

- Reconhecer / verificar que $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A
  $\longrightarrow$ Mostrar que $p_A(\alpha) = det(A - \alpha I) = 0$.

- Determinar os valores próprios de A
  $\longrightarrow$ Determinar as raízes (reais e complexas) de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
  A multiplicidade algébrica de cada valor próprio λ, m.a.(λ), é o número de vezes que λ aparece repetido como raíz na factorização do polinómio característico $p_A(\lambda)$.

- Determinar os vetores próprios de A associados ao valor próprio λ
  $\longrightarrow$ Determinar os vetores <u>não nulos</u> de $E(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$.
  A multiplicidade geométrica de λ é m.g.$(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

Propriedades dos valores próprios

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

- Para todo o valor próprio λ de A tem-se

$$\boxed{1 \leq \text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda)}$$

- A matriz A possui n valores próprios (reais e/ou complexos) contando com repetições, ou seja, a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios **distintos** de A é igual à ordem da matriz A.

- A soma dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), é igual ao traço de A, $\text{tr}(A)$, que se define como a soma dos elementos da diagonal principal de A.

- O produto dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), é igual ao $\det A$.

- $\lambda = 0$ é valor próprio de A se e só se A é não invertível.