Capítulo 6

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 55. Considere o problema de problema de programação linear,

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 & & \\
& & & \\
\text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\
& x_1 + x_2 & \leq & 10 \\
& x_1 & \leq & 8 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

   É o polígono de vértices $(0,0)$, $(8,0)$, $(8,2)$, $(3,7)$ e $(0,8)$.

b) Determine e represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis cujo valor da função objectivo é 8.

   $\{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = 600,\ 0 \leq x_1 \leq 8\}$.

c) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

   $x_1 = 3,\ x_2 = 7$ é a única solução óptima e o correspondente valor da função objectivo é 17. As restrições saturadas são a primeira e a segunda.

d) Considere a função objetivo $z = x_1 + a\, x_2$ com $a > 0$. Indique o intervalo de variação do parâmetro a que mantém óptima a solução que indicou na alínea c).

   $a \in [1, 3]$.

EXERCÍCIOS 56.

1. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (€ /kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta. Formule e resolva o problema em termos de programação linear.

Denotando por x_1 e x_2 as variáveis de decisão que representam a quantidade, em kg, de café de lote A e B, respectivamente, o problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{lrl} \max & 3.5x_1 + 5.0x_2 & \\ \text{s.a} & 0.25x_1 + 0.25x_2 & \leq 100 \\ & 0.75x_1 + 0.25x_2 & \leq 150 \\ & 0.5x_2 & \leq 175 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Devem ser produzidos 50 kg de café do lote A e 350 kg de café do lote B, que originam uma receita bruta máxima de 1925 €.

2. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 €. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

   a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

      Solução: sejam x_1 e x_2 as variáveis que representam a quantidade a transportar, em toneladas, dos produtos P1 e P2, respectivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{lrl} \max & 2000x_1 + 3000x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq 1.5 \\ & 0.5x_1 + 2x_2 & \leq 1 \\ & 1.5x_1 + 4x_2 & \geq 2.5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

A solução indicada satisfaz todas as restrições funcionais e de sinal (verifique), permitindo combater uma área de 2.5 ha.

EXERCÍCIO 57. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 € e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (€)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 euros por hectare de terreno destinado a área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende-se determinar a área a destinar a cada tipo de ocupação de solo por forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{ll} \max & 40x + 80y + 60z \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 100 \\ & 100x + 300y + 400z \leq 30000 \\ & 100x + 150y + 500z \leq 20000 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

em que x, y e z representam, respectivamente, os hectares destinados à área florestal, à reserva de caça e ao parque de campismo.

b) Utilize o suplemento de otimização `Solver` incluído no editor de folha de cálculo `Excel`® para determinar uma solução ótima do problema.

Para uma implementação no Excel usando o Solver ver **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

c) Resolva novamente o problema usando o `Solver` do programa `Excel`, assumindo adicionalmente que 40 ha de terreno são destinados à reserva de caça.

Uma solução destina 40 ha do terreno para floresta e 20 ha para o parque de campismo, proporcionando um lucro máximo de 6000€.

d) Confirme analiticamente a solução obtida na alínea anterior.

EXERCÍCIO 58. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12€ e 8€ e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{lrl} \max & 12p_1 + 8p_2 & \\ \text{s.a} & 5p_1 + 2p_2 & \le 80 \\ & p_2 & \le 30 \\ & p_1, p_2 & \ge 0 \end{array}$$

em que p_1 e p_2 são, respectivamente, as toneladas de P_1 e P_2 a produzir semanalmente.

b) Represente graficamente a região admissível.
A região admissível é região de vértices $A = (0,0)$, $B = (0,30)$, $C = (4,30)$ e $D = (16,0)$.

c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

C, que representa a opção de produzir semanalmente 4 toneladas de P_1 e 30 de P_2, é solução óptima. A solução básica admissível correspondente é $(4,30,0,0)$.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

Entre 0 e 20€.

EXERCÍCIO 59. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil €. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{lrll} \min & 10x_h + 7x_A & & \\ \text{s.a} & 9x_h + 18x_A & \geq 72 & (P) \\ & 10x_h + 10x_A & \geq 50 & (O) \\ & 12x_h + 4x_A & \geq 24 & (H) \\ & x_h, x_A & \geq 0 & \end{array}$$

em que x_h e x_A são, respectivamente, o número de m a aumentar a altura da chaminé e o número de m^2 a aumentar a área dos filtros.

b) Represente graficamente a região admissível.

A região admissível é o polígono de vértices $A = (0,6)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, $C = (2,3)$ e $D = (8,0)$.

c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

A opção definida pelo vértice $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, que consiste em aumentar 1/2 m a altura da chaminé e 9/2 m^2 a área dos filtros, tem um custo mínimo de 36500€. A correspondente solução básica admissível é

$$(x_h, x_A, d_P, d_O, d_H) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 0, 0\right),$$

em que d_P, d_O, d_H são as variáveis de folga associadas às restrições (P),(O) e (H), respectivamente.

EXERCÍCIO 60. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{ll} \max & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} & a + 4b + c + 2d \leq 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d \leq 150 \\ & a \geq 2 \\ & a, b, c, d \geq 0 \end{array}$$

em que a, b, c e d são as quantidades, em toneladas, dos materiais dos tipos A, B, C e D, respectivamente, a armazenar.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

$$\begin{array}{ll} \max & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} & a + 4b + c + 2d + t = 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d + e = 150 \\ & a - a' = 2 \\ & a, b, c, d, t, e, a' \geq 0 \end{array}$$

As variáveis de folga t, e e a' são os valores das diferenças entre o tempo de armazenagem, a área total ocupada e as toneladas de material do tipo A definidos por cada solução admissível e os membros direitos das restrições correspondentes.

c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

Para $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2$ tem-se

$$\begin{array}{rl} a + 4b + c + 2d = 9 & \leq 10 \\ 15a + 16b + 20c + 30d = 150 & \leq 150 \\ a = 2 & \geq 2 \\ a, b, c, d & \geq 0 \end{array}$$

que mostra que $(2, 0, 3, 2)$ é solução admissível. Na forma *standard* a solução correspondente é $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2, t = 1, e = 0, a' = 0$, com mais do que 3 variáveis não nulas, o que permite concluir que $(2, 0, 3, 2, 1, 0, 0)$ não é sba e portanto que $(2, 0, 3, 2)$ não é vértice.

d) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 0 de C e 4 de D corresponde a um vértice da região admissível.

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Pode encontrar uma implementação deste exercício usando o Solver do Excel em **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 61. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{lll} \max & 8x_{A1}+5x_{A2}+7x_{A3}+6x_{B1}+4x_{B2}+10x_{B3} & \\ \text{s.a} & x_{A1}+x_{A2}+x_{A3} & \leq 60 \\ & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3} & \leq 30 \\ & x_{A1}+x_{B1} & = 20 \\ & x_{A2}+x_{B2} & \geq 50 \\ & x_{A1},x_{A2},x_{A3},x_{B1},x_{B2},x_{B3} & \geq 0 \end{array}$$

em que x_{Ki} é a quantidade, em toneladas, de mercadoria a ser transportada do armazém K $(K = A, B)$ para o cliente i $(i = 1, 2, 3)$.

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

A opção $x_{A1} = 20, x_{A2} = 40, x_{A3} = 0, x_{B1} = 0, x_{B2} = 10, x_{B3} = 20$ é admissível pois satisfaz as restrições lineares e de sinal da formulação da alínea a) (verifique), originando um lucro de 600€.

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_{A1}+5x_{A2}+7x_{A3}+6x_{B1}+4x_{B2}+10x_{B3} \\ \text{s.a} & x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+F_1 \quad = 60 \\ & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+F_2 \quad = 30 \\ & x_{A1}+x_{B1} \quad = 20 \\ & x_{A2}+x_{B2}-F_3 \quad = 50 \\ & x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, F_1, F_2, F_3 \quad \geq 0 \end{array}$$

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível do problema.

O sistema de equações que define a região admissível $\mathscr{F}$ do problema na forma *standard* é representado pela matriz ampliada,

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_{A1} & x_{A2} & x_{A3} & x_{B1} & x_{B2} & x_{B3} & F_1 & F_2 & F_3 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 50 \end{array}$$

Calculando as folgas associadas à solução

$$x_{A1} = 20,\ x_{A2} = 40,\ x_{A3} = 0,\ x_{B1} = 0,\ x_{B2} = 10,\ x_{B3} = 20,$$

obtém-se $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Logo a solução correspondende da região admissível na forma *standard* $\mathscr{F}$ é $(20,40,0,0,10,20,0,0,0)$ e a submatriz das colunas associadas às 4 variáveis não nulas da solução anterior é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det M \neq 0$ (verifique), a solução admissível $(20,40,0,0,10,20,0,0,0)$ é também básica e portanto $(20,40,0,0,10,20)$ é um vértice do poliedro definido pelas restrições da alínea a).

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Sugestão: adapte a implementação no Solver da solução do exercício 57 que pode encontrar no **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 62. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P} \end{array}$$

em que
$$\begin{array}{rrcl} \mathscr{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): & x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq & 3 \\ & x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & \geq & 2 \\ & x_1 \quad + x_3 \qquad & \leq & 3 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7): & & \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 & = & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 \quad - x_6 & = & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \qquad\qquad + x_7 & = & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0\}. \end{array}$$

b) Verifique que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ e indique o valor da função objectivo em v.

Para vermos que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ temos que ver que o ponto de $\mathscr{F}$ que lhe corresponde, $\bar{v} = (2, 3, 0, 0, 0, 0, 1)$, é solução básica admissível. Ora $\bar{v}$ é admissível pois as suas componentes são não negativas. Além disso, como a matriz dos coeficientes do sistema de equações que define $\mathscr{F}$ tem característica igual a 4 e o conjunto das colunas da matriz desse sistema que correspondem às componentes não nulas de $\bar{v}$ (colunas 1, 2 e 7) é linearmente independente (verifique), $\bar{v}$ é básica.

O valor da função objectivo correspondente ao vértice v é igual a 7.