Capítulo 6

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 55. Considere o problema de problema de programação linear,

$$
\begin{array}{llcl}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 & & \\
\text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 + \ \ x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

b) Determine e represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis cujo valor da função objectivo é 8.

c) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

d) Considere a função objetivo $z = x_1 + a\, x_2$ com $a > 0$. Indique o intervalo de variação do parâmetro a que mantém óptima a solução que indicou na alínea c).

EXERCÍCIOS 56.

1. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (€ /kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta. Formule e resolva o problema em termos de programação linear.

2. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 €. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

    a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

    b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

EXERCÍCIO 57. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 € e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (€)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 euros por hectare de terreno destinado a área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende-se determinar a área a destinar a cada tipo de ocupação de solo por forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Utilize o suplemento de otimização `Solver` incluído no editor de folha de cálculo `Excel`® para determinar uma solução ótima do problema.

   Sugestão: complete o template do exercício 57 que pode encontrar no **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

c) Resolva novamente o problema usando o `Solver` do programa `Excel`, assumindo adicionalmente que 40 ha de terreno são destinados à reserva de caça.

d) Confirme analiticamente a solução obtida na alínea anterior.

EXERCÍCIO 58. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12€ e 8€ e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

EXERCÍCIO 59. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil €. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

EXERCÍCIO 60. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

d) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 0 de C e 4 de D corresponde a um vértice da região admissível.

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Sugestão: adapte a implementação no Solver da solução do exercício 57 que pode encontrar no **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 61. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível do problema.

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

EXERCÍCIO 62. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P} \end{array}$$

em que

$$\mathscr{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & \geq & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \quad & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

b) Verifique que $v = (2,3,0,0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ e indique o valor da função objectivo em v.

O valor da função objectivo correspondente ao vértice v é igual a 7.