Propriedades dos valores próprios - exemplo

Consideremos a matriz A do exemplo do slide 209 e a respectiva informação espectral do slide 216,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

λ	m.a.(λ)	m.g.(λ)	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$

Constata-se que:

- $2 = \text{m.g.}(1) \leq \text{m.a.}(1) = 2$
  $1 = \text{m.g.}(2) \leq \text{m.a.}(2) = 1$.
- $\text{m.a.}(1) + \text{m.a.}(2) = 2 + 1 = 3 = n$ (ordem da matriz A).
- A soma dos valores próprios de A contando com repetições (m.a.), $1 + 1 + 2 = 4$, coincide com $tr(A) = 1 + 2 + 1 = 4$ (soma das entradas da diagonal principal).
- O produto dos valores próprios de A, contando com repetições (m.a.), $1 \times 1 \times 2$ coincide com $\det(A) = 2$ (verifique).
- Como $\lambda = 0$ não é valor próprio a matriz A é invertível.

Diagonalização de matrizes

Definição de matriz diagonalizável

Uma matriz A de ordem n diz-se diagonalizável se existir uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que

$$P^{-1} A P = D.$$

A matriz P designa-se por matriz de diagonalização para A.

Exemplo

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$P^{-1} A P = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como obter uma matriz de diagonalização P?

Diagonalização e base própria

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ uma matriz diagonal. Dada uma matriz invertível $P = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$, isto é, uma matriz de uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, têm-se as equivalências

$$P^{-1}AP = D \quad \Leftrightarrow \quad P\,P^{-1}AP = PD \quad \Leftrightarrow \quad AP = PD.$$

Como se tem,

$$\begin{aligned} AP &= A[\, v_1 \ \ v_2 \ \ \cdots \ \ v_n \,] = [\, Av_1 \ \ Av_2 \ \ \cdots \ \ Av_n \,], \quad \text{e} \\ PD &= [\, v_1 \ \ v_2 \ \ \cdots \ \ v_n \,] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\, \lambda_1 v_1 \ \ \lambda_2 v_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_n v_n \,], \end{aligned}$$

conclui-se que $AP = PD$ se só se $Av_i = \lambda_i v_i$, para todo o $i = 1, \ldots, n$.

Logo A é diagonalizável com matriz de diagonalização P tal que

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

se e só se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A associados aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Propriedades dos vetores próprios

Observação

Sejam A matriz quadrada de ordem n e $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$ os valores próprios distintos de A.

- Pode-se mostrar que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A se e só se

  $$\text{m.g.}(\lambda'_1) + \cdots + \text{m.g.}(\lambda'_k) = n.$$

  Esta base é obtida reunindo bases dos subespaços próprios $E(\lambda'_1), \ldots, E(\lambda'_k)$.

- Uma vez que soma das mult. alg. dos valores próprios distintos de A é igual à ordem da matriz A e que a multiplicidade geométrica de qualquer valor próprio é sempre inferior ou igual à sua multiplicidade algébrica, a condição anterior é equivalente à condição

  $$\text{m.g.}(\lambda'_i) = \text{m.a.}(\lambda'_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Critérios de diagonalização

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é diagonalizável.

(ii) Existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A.

(iii) A soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios distintos de A é n.

(iv) $\text{m.g.}(\lambda) = \text{m.a.}(\lambda)$ para qualquer valor próprio λ de A.

Nas condições equivalentes anteriores a matriz $P = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$, onde $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, obtida reunindo bases de todos os subespaços próprios de A, é uma matriz de diagonalização para A, tendo-se

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

com λ_i, $i = 1, \ldots, n$, valor próprio de A associado ao vetor próprio v_i.

Exemplo do slide 209 revisitado

Consideremos novamente a matriz A do exemplo do slide 209 e a respectiva informação espectral do slide 216,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	2	$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
2	1	1	$\{(1,1,1)\}$

- Uma vez que $\text{m.g.}(1) = \text{m.a.}(1) = 2$ e $\text{m.g.}(2) = \text{m.a.}(2) = 1$, A é a diagonalizável e o conjunto

  $$\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,0,0,),(0,0,1),(1,1,1)\},$$

  obtido reunindo a base $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ de $E(1)$ com a base $\{(1,1,1)\}$ de $E(2)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A.

- Logo a matriz desta base própria, $P = [\, u_1 \ \ u_2 \ \ u_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de diagonalização para A, tendo-se (verifique),

  $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

- Consideremos agora a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ do exercício 44, cujos valores próprios distintos são $\lambda = 1$ e $\lambda = 6$, tendo-se m.a.$(1) = 2 >$ m.g.$(1) = 1$ e m.a.$(6) =$ m.g.$(6) = 1$.
- Como m.g.$(1) \neq$ m.a.(1) não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de D e portanto D não é diagonalizável.
- Neste caso a cardinalidade (número de vetores) máxima de um conjunto linearmente independente formado por vetores próprios de D é m.g.$(1) +$ m.g.$(6) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Introdução à Programação Linear (PL)

Problema 1

Uma exploração agrícola dispõe de 80 ha de terreno para produzir tomate e trigo. Para além do terreno, os recursos susceptíveis de limitar a produção das duas culturas são a água e a mão de obra: sabe-se que **cada hectare de tomate** necessita de 8000 m^3 de água e de 40 h de mão de obra e que **cada hectare de trigo** requer apenas 20 h de mão de obra. A exploração agrícola dispõe de 320000 m^3 de água e 2000 horas de mão de obra. As receitas, por cada hectare de tomate e trigo cultivados são, respetivamente, 300 € e 200 €. Pretende-se determinar a **área a destinar a cada cultura** por forma a maximizar a receita total.

Dados do problema:

	Utilização de recursos		
	Água	Mão de obra	Receita (max)
Tomate	8000 m^3/ha	40 h/ha	300 €/ha
Trigo		20 h/ha	200 €/ha
Disponibilidades	$\leq$ 320000 m^3	$\leq$ 2000 h	
Terreno	$\leq$ 80 ha		

Construção do modelo matemático

Variáveis de decisão

Vamos considerar duas variáveis, x e y, que representam as áreas (em hectares) a destinar ao cultivo do tomate e do trigo, respetivamente.

Função objetivo

A função objetivo (f.o.) traduz a relação entre o valor da receita total (em €) e as receitas obtidas pelo cultivo de x hectares de tomate e y hectares de trigo:

$$z = 300\,x + 200\,y.$$

Restrições funcionais

As restrições funcionais traduzem as limitações dos recursos disponíveis:

- A área total de **terreno** cultivado não pode exceder 80 ha $\longrightarrow$ $x + y \leq 80.$
- O consumo de **água** não pode exceder 320000 m^3 $\longrightarrow$ $8000\,x \leq 320000.$
- A **mão de obra** utilizada não pode exceder 2000 h $\longrightarrow$ $40\,x + 20\,y \leq 2000.$

Restrições de sinal

Pela sua natureza as variáveis não podem tomar valores negativos $\longrightarrow$ $x, y \geq 0.$

Formulação do Problema 1 em PL

O Problema 1 pode então ser formulado em PL como,

$$\begin{array}{lll}
\max & z = 300\,x + 200\,y & \\
\text{s.a} & x + y \leq 80 & (\mathrm{T}) \\
 & 8000\,x \leq 320000 & (\mathrm{A}) \\
 & 40\,x + 20\,y \leq 2000 & (\mathrm{MO}) \\
 & x, y \geq 0 &
\end{array}$$

em que

- x = área (em ha) destinada à cultura de tomate,
- y = área (em ha) destinada à cultura de trigo.

Repare-se que apesar da cultura de trigo não necessitar de água e requerer menos horas de mão de obra que a cultura de tomate, também gera menos receita, pelo que não é óbvia qual a área a destinar a cada uma das culturas de modo a maximizar a receita.

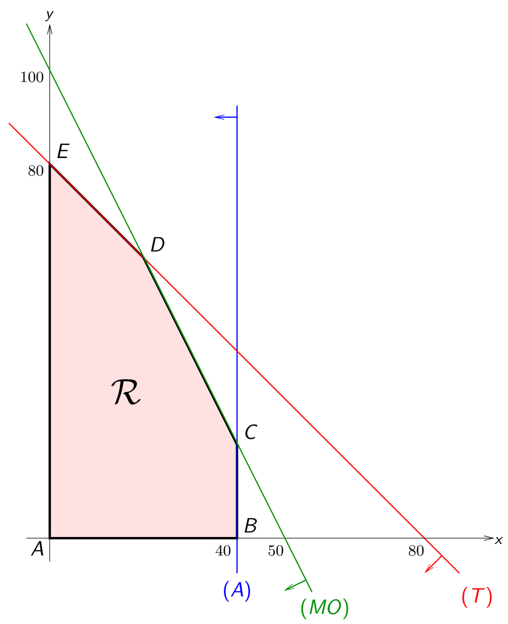
Solução e região admissível de um problema em PL

- A região admissível de um problema em PL é o conjunto das suas soluções admissíveis, isto é, o conjunto das soluções que satisfazem todas as restrições funcionais e de sinal.

- Dividindo a segunda restrição da formulação do Problema 1 por 8000 e a terceira por 20 (ver o slide 196), obtêm-se restrições lineares mais simples, passando a região admissível $\mathcal{R}$ do Problema 1 a ser definida por:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 80 \\ x &\leq 40 \\ 2x + y &\leq 100 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Região admissível do problema em PL



- A inequação linear $x + y \leq 80$ define o semi-plano (assinalado por meio de $\rightarrow$) que contém a origem (porque $0 + 0 \leq 80$) e cuja fronteira é a reta de suporte (a vermelho) de equação $x + y = 80$. Se $y = 0$ nesta equação, obtém-se $x = 80$ e se $x = 0$ então $y = 80$, concluindo-se que a reta de suporte intersecta os eixos coordenados nos pontos $(80, 0)$ e $(0, 80)$.
- A inequação $x \leq 40$ define o semi-plano (assinalado por meio de $\rightarrow$) com fronteira dada pela reta vertical de suporte $x = 40$ (a azul).
- A inequação $2x + y \leq 100$ define o semi-plano (assinalado por meio de $\rightarrow$), que contém a origem e cuja fronteira é a reta de suporte (a verde) de equação $2x + y = 100$, que intersecta os eixos coordenados em $(50, 0)$ e $(0, 100)$.

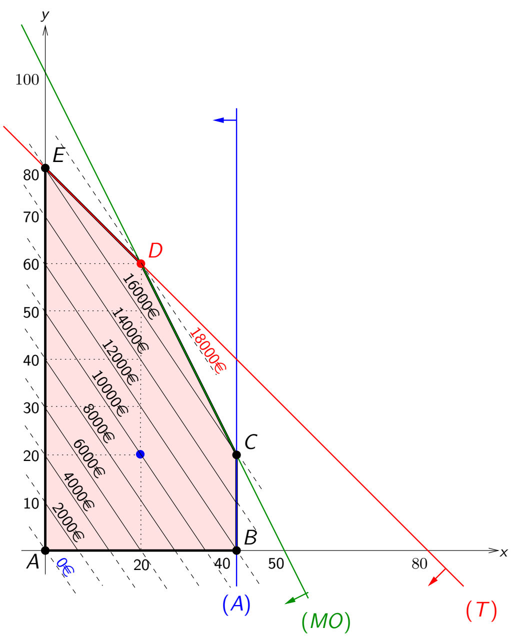
A região admissível $\mathcal{R}$ obtém-se intersectando os 3 semi-planos descritos acima com o primeiro quadrante definido pelas restrições de sinal $x, y \geq 0$, e define o polígono $[ABCDE]$.

Conjuntos de nível da função objetivo

- Dado $k \in \mathbb{R}$ define-se o conjunto de nível k da função objectivo (f.o.) $z = 300\,x + 200\,y$, como
$$C_k = \{(x,y)\ :\ 300\,x + 200\,y = k\},$$
que representa o conjunto dos pontos do plano em que a f.o. toma o valor k. Os conjuntos C_k, $k \in \mathbb{R}$, definem retas paralelas entre si, uma vez que são todas perpendiculares ao mesmo vetor normal $(300, 200)$.
- O conjunto das soluções que geram uma dada receita k€ é a parte do conjunto de nível C_k contida na região admissível $\mathcal{R}$, ou seja,
$$\{(x,y) \in \mathcal{R}\ :\ 300\,x + 200\,y = k\},$$
que pode obviamente ser vazia.
- Por exemplo, cultivar 20 hectares de tomate e 20 hectares de trigo corresponde à solução admissível $(20, 20) \in \mathcal{R}$ e gera uma receita de $k = 300x20 + 200x20 = 10000$€.
- O conjunto das soluções admissíveis que geram a mesma receita que a solução $(20, 20)$ é o conjunto
$$\{(x,y) \in \mathcal{R}\ :\ 300\,x + 200\,y = 10000\},$$
que corresponde à parte da reta de nível C_{10000} contida em $\mathcal{R}$.

Resolução gráfica do problema de PL

Representam-se na figura abaixo a solução admissível $(20, 20) \in \mathcal{R}$ e as retas de nível da f.o. para diferentes valores de receita k€, com a parte fora da região admissível a tracejado.



Torna-se evidente pela figura que o valor máximo da receita é atingido no vértice D, cujas coordenadas podem ser obtidas intersectando as retas de suporte $x + y = 80$ e $2x + y = 100$, isto é, como solução do sistema,

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 60 \end{cases}$$

O vértice $D = (20, 60)$ designa-se por solução ótima do problema de PL e corresponde a cultivar 20 hectares de tomate e 60 ha de trigo, originando uma receita máxima de 18000€.

A solução ótima $D = (20, 60)$ utiliza a totalidade da mão de obra e do terreno disponíveis, uma vez que está na interseção das retas de suporte das correspondentes restrições funcionais, e portanto estas 2 restrições são satisfeitas com igualdade ($x + y = 20 + 60 = 80$ e $2x + y = 40 + 60 = 100$), dizendo-se que estão saturadas.

Vértices do polígono de admissibilidade e solução ótima

- As coordenadas de cada vértice da região admissível $\mathcal{R}$ do Problema 1 obtêm-se intersectando as retas de suporte que contêm o vértice. Por exemplo, as coordenadas do vértice C obtêm-se como

$$C: \quad \begin{cases} x = 40 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases}$$

- Veremos a seguir que uma solução ótima do problema de PL ocorre num vértice do polígono de admissibilidade $\mathcal{R}$, uma vez que a região admissível $\mathcal{R}$ é não vazia e limitada.
- Calculando o valor da função objectivo em cada vértice de $\mathcal{R}$ constata-se que o valor mais elevado é obtido no vértice D, concluindo-se novamente que uma solução ótima ocorre no vértice D:

vértice (x, y)	$z = 300x + 200y$
$A = (0, 0)$	0€
$B = (40, 0)$	12000€
$C = (40, 20)$	16000€
$D = (20, 60)$	18000€ (máx.)
$E = (0, 80)$	16000€

Formulação de um problema de PL: caso geral

- Num problema de PL, pretende-se determinar o(s) valor(es) de um conjunto de variáveis de decisão $x_1, \dots, x_k$ que otimizam (maximizam ou minimizam), uma função linear designada por função objetivo (f.o.), e que satisfazem um conjunto de restrições funcionais (restrições lineares) (1),. . . , (m) e de sinal (m+1):

$$\begin{array}{lll}
\text{max ou min} & z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_k\,x_k & \text{(f.o.)} \\
s.a & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1k}\,x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_1 & (1) \\
 & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2k}\,x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_2 & (2) \\
 & \vdots & \\
 & a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mk}\,x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_m & (m) \\
 & x_1 \geq 0, \leq 0 \text{ ou livre}, \ \dots, x_k \geq 0, \leq 0 \text{ ou livre} & (m+1)
\end{array}$$

- c_j, a_{ij} e b_i, com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, k$, são os parâmetros do problema.
- O conjunto de pontos que satisfazem as restrições funcionais (1),. . . , (m) e as restrições de sinal (m+1) designa-se por região admissível do problema, denotada $\mathcal{R}$ e define um poliedro de $\mathbb{R}^k$ chamado poliedro de admissibilidade.
- Cada ponto da região admissível $\mathcal{R}$ designa-se por solução admissível.
- Uma solução admissível que otimize (maximize ou minimize) a f.o. designa-se por solução ótima.
- A cada restrição linear do tipo $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \dots + a_{ik}\,x_k \leq (\geq)\, b_i$ associamos a equação linear $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ik}\,x_k = b_i$ que se designa por hiperplano de suporte da região admissível $\mathcal{R}$ se intersetar a fronteira de $\mathcal{R}$.