Vértices da região admissível e soluções ótimas

Teorema fundamental

Consideremos o problema $\mathcal{P}$ de programação linear,

$$\begin{array}{ll} \max\ (\text{ou}\ \min) & z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_k\,x_k \\ \text{s. a} & (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathcal{R}, \end{array}$$

com $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{R}$ região admissível definida por restrições funcionais e de sinal como descrito no slide 234. Se $\mathcal{R}$ for **limitada e não vazia** tem-se:

1. Existe um vértice de $\mathcal{R}$ que é solução ótima do problema $\mathcal{P}$.
2. Se q vértices $v_1, \ldots, v_q$ são soluções ótimas do problema $\mathcal{P}$ então qualquer combinação convexa de $v_1, \ldots, v_q$,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_q v_q,$$

   em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \geq 0$ com $\lambda_1 + \cdots + \lambda_q = 1$, é ainda solução ótima de $\mathcal{P}$

Observações

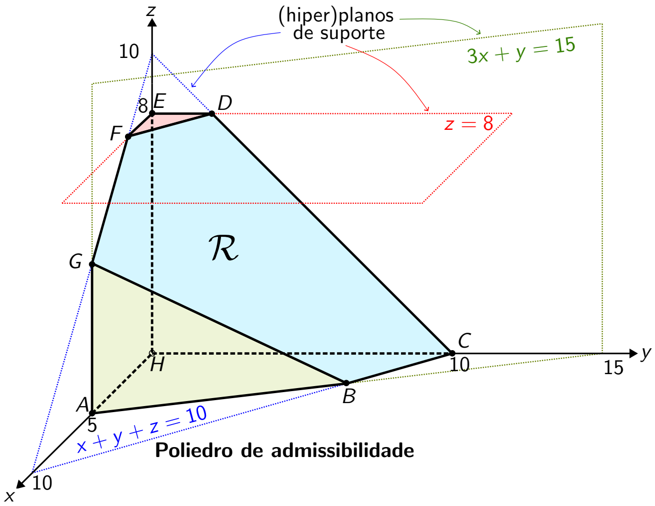
- O 1º ponto do teorema anterior reduz o problema de determinar uma solução ótima de um problema de PL com região admissível limitada e não vazia $\mathcal{R}$, ao problema de determinar os vértices de $\mathcal{R}$ (que são em número finito) e identificar o(s) vértice(s) onde a função objectivo atinge o maior ou menor valor, consoante o problema seja de maximização ou minimização.
- As combinações convexas de 2 vértices v_1 e v_2 são os pontos do segmento de reta que une v_1 a v_2. Logo pelo 2º ponto do teorema anterior se v_1 e v_2 são soluções ótimas de $\mathcal{P}$, qualquer ponto desse segmento de reta é ainda uma solução ótima de $\mathcal{P}$, que se designa por solução ótima alternativa.
- De modo análogo se conclui que se v_1, v_2 e v_3 são soluções ótimas não colineares de $\mathcal{P}$ então qualquer o ponto do triângulo de vértices v_1, v_2 e v_3 é uma solução ótima alternativa de $\mathcal{P}$.
- ...

Aplicação a um problema em PL com 3 variáveis

Consideremos o problema de PL,

$$\begin{array}{lrl} \max & 2x+y+z & \\ \text{s. a} & x+y+z & \leq 10 \\ & 3x+y & \leq 15 \\ & z & \leq 8 \\ & x,\ y,\ z & \geq 0 \end{array}$$

A região admissível é o poliedro $\mathcal{R}$ representado na seguinte figura.



Poliedro de admissibilidade

Valores da f.o. nos vértices do poliedro de admissibilidade

Como $\mathcal{R}$ é não vazia e limitada para obter uma solução ótima basta determinar o(s) vértice(s) onde a função objetivo atinge o valor máximo.

Ora tem-se,

Vértice de $\mathcal{R}$ (x, y, z)	Valor da f.o. $2x + y + z$
$A = (5, 0, 0)$	10
$B = (2.5, 7.5, 0)$	12.5
$C = (0, 10, 0)$	10
$D = (0, 2, 8)$	10
$E = (0, 0, 8)$	8
$F = (2, 0, 8)$	12
$G = (5, 0, 5)$	15 (máx.)
$H = (0, 0, 0)$	0

Logo uma solução ótima do problema ocorre no vértice $(5, 0, 5)$ com valor ótimo 15.

Problema de PL com soluções ótimas alternativas

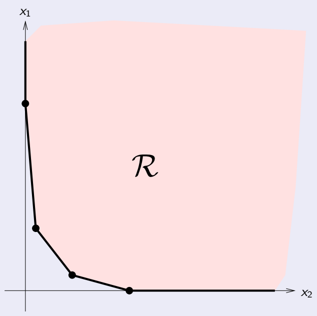
- Se no problema de PL do slide 237 alterarmos a f.o. para $0x + 0y + z$ e recalcularmos os valores da f.o. nos vértices do poliedro de admissibilidade $\mathcal{R}$, concluímos que o máximo (de valor 8) ocorre nos vértices D, E e F (verifique).

- Logo pelas observações do slide 236, tem-se que qualquer ponto do triângulo $[DEF]$ é uma solução ótima alternativa do problema de PL do slide 237 com a nova f.o. $0x + 0y + z$.

Regiões admissíveis não limitadas

Observação

Se a região admissível de um problema de PL for não limitada (como na região da figura abaixo) pode não existir um vértice onde ocorra uma solução ótima.



Por exemplo, no exercício 59 da sebenta de exercícios existe um vértice onde ocorre o mínimo da f.o., mas não existe um vértice onde ocorra o máximo (uma vez que este é $+\infty$).

Resolução de problemas de PL no caso geral?

- Problemas de PL usados em contextos mais realistas podem chegar a envolver milhões de variáveis de decisão!
- Nos casos em que a dimensão do problema é relativamente pequena podemos usar o suplemento Solver que vem incluído no programa de folha de cálculo Excel, que permite especificar até 200 variáveis (células de valor ajustável). Veremos nas aulas práticas como implementar e resolver problemas em PL usando o suplemento Solver (consultar também os ficheiros disponibilizados no separador **Material de Apoio** no Fénix).
- Embora não seja, em geral, viável representar graficamente regiões admissíveis de problemas de PL com 3 ou mais variáveis de decisão, podemos identificar e reconhecer os vértices dessas regiões de forma indireta, como veremos a seguir. Mas para isso temos primeiro que converter a formulação do problema para uma a certa forma canónica...

Problema de PL na forma *standard*

Definição de problema de PL na forma *standard*

Um problema de PL diz-se na forma *standard* se as todas as restrições funcionais forem equações lineares e as variáveis de decisão tomarem valores não negativos.

- No que se segue iremos sempre considerar problemas de PL em que as variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_k$ tomam valores não negativos, ou seja, vamos assumir desde o início que as restrições de sinal são todas do tipo $x_1, \ldots, x_k \geq 0$.
- Acrescentando novas variáveis auxiliares, ditas variáveis de folga, podemos converter um problema em PL para a forma *standard*, como explicado no próximo slide.

Conversão de um problema de PL para a forma *standard*

- Substituímos cada restrição funcional do tipo,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \leq b$$

  pela restrição,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_n + f = b$$

  onde $f = b - a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_n$ é uma nova variável de folga e acrescentamos a restrição de sinal dessa variável, $f \geq 0$.
- Substituímos cada restrição funcional do tipo,

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_{ik}x_k \geq b',$$

  pela restrição,

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_kx_n - f' = b'$$

  onde $f' = a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_kx_n - b'$ é uma nova variável de folga e acrescentamos a restrição de sinal dessa variável, $f' \geq 0$.
- As restrições funcionais do tipo,

$$a''_1x_1 + a''_2x_2 + \cdots + a''_kx_k = b'',$$

  as restrições de sinal das variáveis de decisão e a f.o. ficam **inalteradas**.

Conversão do Problema 1 para a forma *standard*

Problema original

$$\begin{array}{lllll}
\max & z = 300\,x + 200\,y & & \\
\text{s.a} & x + y & \leq & 80 \\
& 8000\,x & \leq & 320000 \\
& 40\,x + 20y & \leq & 2000 \\
& x,\ y & \geq 0 &
\end{array}$$

$-\,-\rightarrow$

Problema na forma *standard*

$$\begin{array}{lll}
\max & z = 300\,x + 200\,y & \\
\text{s.a} & x + y + f_1 & = 80 \\
& 8000\,x + f_2 & = 320000 \\
& 40\,x + 20y + f_3 & = 2000 \\
& x,\ y,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \geq 0 &
\end{array}$$

em que,

- $f_1 = 80 - (x + y)$ representa a área de terreno disponível (em ha) que não foi utilizada.
- $f_2 = 320000 - 8000x$ representa a água disponível (em m^3) e não utilizada.
- $f_3 = 2000 - (40x + 20y)$ representa as horas de mão-de-obra disponíveis e não utilizadas.

Problema 2

Problema 2

Uma empresa produz três tipos de fertilizantes, A, B e C. Cada tonelada de fertilizante A, B e C gera 50, 40 e 60 unidades de resíduos tóxicos e origina um lucro de 10, 5 e 10 euros, respetivamente. A empresa tem capacidade para produzir 15 mil toneladas de fertilizantes por mês. Compromissos já assumidos obrigam a empresa a entregar mensalmente 5 mil toneladas de fertilizante A a um cliente. Pretende-se determinar o plano de produção mensal que gera a menor quantidade possível de resíduos tóxicos de modo a obter-se um lucro mensal de pelo menos 100 mil euros e uma produção mensal nunca inferior a 80% da capacidade de produção da empresa.

Dados do problema:

	Resíduos	Lucro	
Fertlizante A	50 unid./t	10 €/t	$\geq$ 5000 t/mês
Fertlizante B	40 unid./t	5 €/t	
Fertlizante C	60 unid./t	10 €/t	
	min	$\geq$ 100000 €	
Capacidade mensal	$\leq$ 15000 t		
Produção mensal	$\geq$ .80 $\times$ 15000 t		

Formulação do Problema 2 em PL

O Problema 2 pode então ser formulado em PL como,

$$
\begin{array}{lllll}
\min & z = 50x_A + 40X_B + 60x_C & & & \\
\text{s.a} & x_A + \ x_B + \ x_C & \leq & 15000 & (1) \\
 & x_A & \geq & 5000 & (2) \\
 & 10x_A + 5x_B + 10x_C & \geq & 100000 & (3) \\
 & x_A + \ x_B + \ x_C & \geq & 12000 & (4) \\
 & x_A, \ x_B, \ x_C \geq 0 & & &
\end{array}
$$

em que

- x_A, x_B e x_C representam, respetivamente, as quantidades, em toneladas, de fertilizante dos tipos A, B e C a produzir mensalmente.

Vamos converter esta formulação para a forma *standard* aplicando as regras do slide 243.

Conversão do Problema 2 para a forma *standard*

$$
\begin{array}{llr}
\min & z = 50x_A + 40X_B + 60x_C & \\
\text{s.a} & x_A + x_B + x_C + f_1 = 15000 & (1)\\
 & x_A - f_2 = 5000 & (2)\\
 & 10x_A + 5x_B + 10x_C - f_3 = 100000 & (3)\\
 & x_A + x_B + x_C - f_4 = 12000 & (4)\\
 & x_A,\ x_B,\ x_C,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

em que as varivéis de folga, f_1, f_2, f_3 e f_4 têm o seguinte significado:

- $f_1 = 15000 - (x_A + x_B + x_C)$ que representa a capacidade de produção mensal de fertilizantes (em toneladas) não utilizada.
- $f_2 = x_A - 5000$ que representa a quantidade de fertilizante A produzida (em toneladas) para além do compromisso assumido.
- $f_3 = 10x_a + 5x_B + 10x_C - 100000$ que representa o lucro obtido (em €) acima do lucro mínimo pretendido de 100000€.
- $f_4 = x_A + x_B + x_C - 12000$ que representa a produção mensal de fertilizantes (em toneladas) produzida acima de 80% da capacidade mensal de produção.

Como reconhecer os vértices da região admissível?

- Consideremos a solução do Problema 2 que consiste em produzir 5000 toneladas de fertilizante A, nenhuma de fertilizante B e 10000 de fertilizante C.

- A solução anterior,

$$x = (x_A, x_B, x_C) = (5000, 0, 10000),$$

verifica todas as restrições funcionais,

$$
\begin{array}{rr}
x_A + x_B + x_C = 15000 \geq 15000, & (1)\\
X_A = 5000 \geq 5000, & (2)\\
10x_A + 5x_B + 10x_C = 150000 \geq 100000, & (3)\\
x_A + x_B + x_c = 15000 \geq 12000, & (4)
\end{array}
$$

e de sinal $x_A, x_B, x_C \geq 0$ e é portanto uma solução admissível do problema.

- Será que corresponde a um vértice da região admissível do problema?