Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1.

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Simplifique e calcule, sempre que possível, as seguintes expressões.

a) $(5A - A) - (B - 2B)$ b) $(2A - B)^\top - C$ c) $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$
d) $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$ e) $D + D^\top$ f) $D - D^\top$.

a) $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 18 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, **d)** Não definido, **e)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

$\alpha = -3$, $\beta = \frac{1}{2}$

EXERCÍCIO 2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, BI e IB onde I denota a matriz identidade de ordem conveniente, $u^\top u$, $u\,u^\top$, Bu, Bv, $B[\,u\ \ v\,]$, $B(u+v)$ e B^3.

$$AB=\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2\\ -11 & -2 & 9\end{bmatrix},\ \ BA \text{ não definida},\ \ BA^T=\begin{bmatrix} 4 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix},\ CC=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$BI=IB=B,\quad u^Tu=14,\ \ uu^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix},\ \ Bu=\begin{bmatrix} 5\\ 5\\ -3\end{bmatrix},\ \ Bv=\begin{bmatrix} 1020\\ 2960\\ -190\end{bmatrix},$$

$$B[\,u\ \ v\,]=\begin{bmatrix} 5 & 1020\\ 5 & 2960\\ -3 & -190\end{bmatrix},\ B(u+v)=\begin{bmatrix} 1025\\ 2965\\ -193\end{bmatrix} \text{ e } B^3=\begin{bmatrix} 20 & -4 & -1\\ 10 & 8 & -23\\ 15 & 10 & 10\end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS 3. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss.

1. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 6\\ 2x_1+5x_2+x_3 = 9\\ x_1+4x_2-6x_3 = 1\end{cases}$$
$CS=\{(-1,2,1)\}$ (PD)

2. $$\begin{cases} x+2y+3z = 0\\ x+y+z = 10\\ x+2z = 0\end{cases}$$
$CS=\{(\frac{40}{3},\frac{10}{3},-\frac{20}{3})\}$ (PD)

3. $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 4\\ 2x_1+4x_2-x_3+2x_4 = 11\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 1\end{cases}$$
$CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=1-5x_4, x_2=2+2x_4, x_3=-1, x_4\in\mathbb{R}\}$ (PI)

4. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5 = 2\\ x_3+x_4+x_5 = -1\\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0\end{cases}$$
$CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): x_1=13-2x_2+8x_5, x_3=-5-3x_5, x_4=4+2x_5, x_2,x_5\in\mathbb{R}\}$ (PI)

5. $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 1\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4 = 9\\ x_1+2x_2+x_3-x_4 = -6\\ x_1+x_2-2x_3+x_4 = 7\end{cases}.$$
$CS=\{(1,-1,-2,3)\}$ (PD)

EXERCÍCIOS 4.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.

   Determine os valores de α para os quais $(-1, 0, 2, 1)$ é solução do sistema $Ax = \vec{0}$.

3. Seja $Ax = b$ um sistema que admite soluções não nulas u e v. Para que valores de b o vetor $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

a) $CS = \left\{\left(\frac{3}{10}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$ **b)** $\alpha = 2$ **c)** $b = \vec{0}$

EXERCÍCIOS 5.

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 + 6x_2 & = & b \end{cases}$$

   é impossível?

   $b \neq 8$

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

   de forma a obter um sistema impossível.

   Por exemplo, $3x_1 + 2x_3 = 5$ (como exercício adicional interprete geometricamente o sistema impossível que se obtém com esta solução no contexto dos 8 casos do esquema da página 28 do Texto de Apoio e indique uma solução alternativa para este exercício que corresponda geometricamente a um caso distinto

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

   a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

a) IMP - representa 4 retas não concorrentes num ponto **b)** PD - representa 3 planos que se intersectam num único ponto (1º caso do esquema da página 28 do Texto de Apoio), **c)** PI - representa 3 planos não paralelos nem coincidentes que são concorrentes numa reta (2º caso do esquema da página 28 do Texto de Apoio)

Verifique adicionalmente que o ponto de intersecção referido em b) tem coordenadas $(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$ e que a reta de intersecção referida em c) passa na origem e tem vetor diretor $(-3, 4, 1)$.

EXERCÍCIOS 6.

1. Discuta cada um dos seguintes sistemas lineares para todos os valores dos parâmetros.

a) $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{cases}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} 2x + 4y + bz = 2 \\ x + (d+2)y = 1 \\ x + 2y + bz = 1 \\ x + 2y = c \end{cases}, \quad b, c, d \in \mathbb{R}.$

a) Se $a \neq 1$ é PD. Se $a = 1$ é IMP, **b)** PD $\forall \gamma$, **c)** Se $ab \neq 4$ é PD. Se $ab = 4$ com $a \neq 1$ é IMP. Se $a = 1$ e $b = 4$ é PI (com variável livre x_3), **d)** Se $c \neq 1$ é IMP $\forall b, d$. Se $c = 1$ e $b, d \neq 0$ é PD. Se $c = 1$ e $bd = 0$ é PI (com variáveis livres x_2 e x_3 se $b = d = 0$, com variável livre x_3 se $b = 0$ e $d \neq 0$ e com variável livre x_2 se $b \neq 0$ e $d = 0$)

2. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$
   (Exercício do 1º teste de 12 de novembro de 2022)

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

   a) Se $\alpha \neq -2, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = -2$ o sistema é PI $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ o sistema é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP. **b)** Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD. Se $\alpha = -1$ é IMP. Se $\alpha = 1$ é PI.

   b) Se $\alpha \neq -1, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ o sistema é PI. Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 4$ o sistema é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 4$ o sistema é IMP.

EXERCÍCIO 7. Considere os sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que tornem o sistema

   c1) impossível,

   c2) indeterminado.

a) $a \neq 1$, **b)** Se $b_1 - b_2 + b_3 = 0$, **c1)** $a = 1$ e b_1, b_2, b_3 tal que $b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$. Por exemplo, $b = (0, 0, 1)$, **c2)** Se $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 = 0$. Por exemplo, $b = (1, 2, 1)$

EXERCÍCIOS 8.

1. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

   b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

a) Podem existir <u>no máximo</u> o menor dos 2 números m e n, **b)** número de linhas nulas de E é igual $m-$ número de pivots de E

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $n-m$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   d) Se S é possível e $m \geq n$, então S é determinado.

   e) Se S é possível e determinado então $m = n$ e a matriz reduzida obtida por aplicação do método de Gauss à matriz dos coeficientes de S é a matriz identidade.

   São todas falsas com a excepção da última (para cada das alíneas falsas apresente um *contra-exemplo*, ou seja, um exemplo de um sistema S em que a afirmação não seja verificada)

EXERCÍCIO 9. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 10.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \text{ singular, } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

   $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.
   a) É correto afirmar que $A+B$ é invertível?
   b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?
   c) Prove que se $AB = AC$ então $B = C$.

5. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.
   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?
   É invertível com inversa $A+I$
   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

6. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.
   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.
   b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.
   c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

   $$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ respetivamente.}$$

   Determine a inversa de A em função dos vetores u, v e w.
   a) ambos PD com solução $A^{-1}b$ e Ac, respetivamente, **c)** $A^{-1} = \left[\frac{1}{3}u \mid v \mid \frac{1}{2}w\right]$

7. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

   $$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

   em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \;\; 3\,]$.

(a) Qual o tipo da matriz X?

(b) Determine X.

a) 2×2; **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

   i) A é invertível.

   ii) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

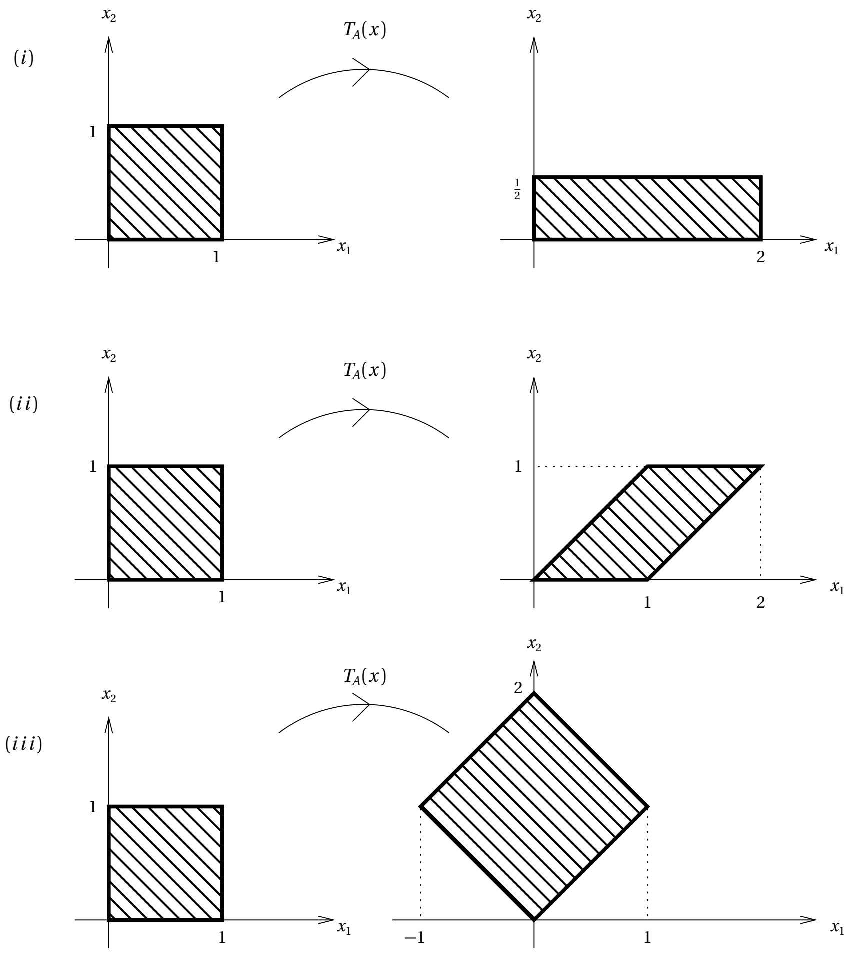
   iii) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIOS 11.

1. Considere a transformação linear $T_A(x) = Ax$, em que $A_{2\times 2}$ e $x \in \mathbb{R}^2$.
   Indique matrizes $A_{2\times 2}$ de modo a que:

   (a) T_A defina a reflexão no plano relativamente ao primeiro eixo coordenado. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) A acção de T_A no quadrado unitário definido pelos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ corresponda a cada uma das 3 situações ilustradas a seguir:



   Relativamente ao 3º caso, escreva a transformação que obteve como composição de duas transformações geométricas não triviais.

i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **ii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **iii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tendo-se neste caso a composição $T_A = H_{\sqrt{2}} \circ R$ (usando as notações dos slides 70 e 71).

2. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Interprete e comente a acção da transformação geométrica do plano definida por A no quadrado unitário (ver exercício anterior) e no paralelogramo definido pelos vetores $(1,0)$ e $(1,1)$.

3. Interprete o produto de matrizes AB usando uma transformação geométrica do plano, onde

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Corresponde à reflexão do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ em relação ao eixo dos yy.

4. Defina as rotações no espaço de θ radianos em torno do primeiro e do segundo eixos coordenados (no sentido direto).

$$R_{x,\theta}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_{y,\theta}=\begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix}.$$

5. Indique as matrizes das seguintes transformações lineares.

   (a) $T(x,y,z)=(2x+y,-y,x+y+z)$.
   $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$.
   $A=[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$.

   (c) $T(x_1,x_2)=(x_1,x_2,x_1+x_2)$.
   $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Averigue quais das seguintes transformações lineares são invertíveis, indicando a respetiva inversa caso exista.

   (a) Rotação no plano no sentido anti-horário de θ radianos.
   Sim, $R_\theta^{-1}=R_{-\theta}$.

   (b) Projecção no espaço sobre o plano xOy.
   Não, pois a projeção é definida pela matriz não invertível, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $T(x,y,z)=(x+y,y+z,x+z)$.

Sim, $T^{-1}(x,y,z)=T_{A^{-1}}(x,y,z)=A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=$ $\frac{1}{2}(x-y+z, x+y-z, -x+y+z)$, onde A é a matriz da tranformação T.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 12.

1. Calcule $A^2+3bb^\top$, com $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $\begin{bmatrix} 12 & -6 & 7 \\ -14 & 7 & 6 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Indique o conjunto de soluções dos sistemas lineares

   (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

   a) $CS=\{(x,y,z): x=0, y=1-z, z\in\mathbb{R}\}$;
   b) $CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=4+2x_2, x_3=3, x_4=-1, x_2\in\mathbb{R}\}$

3. Discuta os sistemas $Ax=b$ para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, com

   (a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Se $\alpha \neq 2$ é PD. Se $\alpha = 2$ é IMP **b)** Se $\beta \neq 1$ é IMP $\forall \alpha$. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -5$ é PD. Se $\beta = 1$ e $\alpha = -5$ é IMP. **c)** Se $\alpha \neq 14$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 14$ e $\beta \neq 6$ é IMP. Se $\alpha = 14$ e $\beta = 6$ é PI. **d)** Se $\alpha \neq 3$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 3$ e $\beta \neq 1$ é IMP. Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ é PI. **e)** Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD. Se $\alpha = -1$ é IMP. Se $\alpha = 1$ é PI.

4. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   Se $b = 0$ ou $a = b$ é IMP. Se $b \neq 0$ e $a \neq b$ é PD.

5. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

   admita a solução $(2, -1, 2)$.

   $a = b = c = 1$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

   $CS = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que define uma reta que passa na origem com vetor diretor $(-1, 1, 1)$

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^4$ para os quais $Ax = b$ é possível.

b) Qual é a característica de A?

c) Dê exemplo de um vetor c para o qual o sistema $Ax = c$ seja impossível.

a) $\{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$; **b)** 2; **c)** $(1,0,0,0)$

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema $(A - \lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Indique a característica de $A - \lambda I$ em função de λ. Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

   b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

   c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções.

a) $\text{car}(A) = 2$ se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ e $\text{car}(A) = 3$ para $\lambda \neq -1, 2$. O sistema é indeterminado para $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$. **c)** $CS = \{((x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que representa a reta que passa na origem e tem vetor diretor $(-1, -1, 1)$

9. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 + \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

   b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

   c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

10. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Indique os valores de α, β para os quais A é invertível.

   (c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

   a) Se $\alpha \neq 1$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ é IMP; **b)** $\alpha \neq 1$;
   c) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

11. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas invertíveis de ordem n. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações matriciais (em ordem a X):

   (a) $(C+X)A=D$.

   (b) $B(CA+3X)=DX$.

   (c) $ABX=I$.

   (d) $3X+AX=I$.

   (e) $(AB)^{-1}BAX=I$.

   (f) $(X-A)^2=B+(X-A)X$.

   (g) $ABX(AB)^{-1}=I$.

   (h) $BX+XA=I$.

   a) $X=DA^{-1}-C$; **b)** Não é possível; **c)** $X=B^{-1}A^{-1}$; **d)** Não é possível; **e)** $X=A^{-1}B^{-1}AB)$; **f)** $X=A-BA^{-1}$; **g)** $X=I$; **h)** Não é possível

12. Determine matrizes X e Y tais que $3X-2Y=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X+Y=2I$.

   $X=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $Y=\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

13. Considere $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a inversa de A (caso exista).

   (b) Resolva a equação matricial $AX=B$.

   a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -15 & -6 \\ -5 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

14. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3=0$.
   Mostre que $I-A$ é invertível com inversa $I+A+A^2$.

15. Escreva uma equação vetorial equivalente a

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$; **b)** $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

16. Interprete a transformação geométrica do plano, dita transformação *afim*,

$$T(x,y) = (x+a, y+b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

e indique os valores de a e b para os quais a transformação é também linear.

Trata-se de uma translação no plano definida pelo vetor (a,b). Uma vez que $T(0,0) = (a,b)$, a transformação afim não é linear se $(a,b) \neq (0,0)$ (ver o slide 75). Quando $(a,b) = (0,0)$ a transformação afim é linear pois reduz-se à identidade de $\mathbb{R}^2$ definida pela matriz I_2.

17. Interprete a transformação geométrica do espaço definida pela matriz $A = \mathrm{diag}(a,b,c)$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Acrescentar no enunciado da pergunta $a,b,c \neq 0$.

Podemos considerar T_A como a composição das transformações $T_{x,a}$, $T_{y,b}$ e $T_{z,c}$, cujas matrizes são, respetivamente, $\mathrm{diag}(a,1,1)$, $\mathrm{diag}(1,b,1)$ e $\mathrm{diag}(1,1,c)$. Cada uma destas transformações efetua uma dilatação/contração/"fica invariante" segundo o eixo indicado, consoante o valor absoluto do respectivo parâmetro seja > 1, < 1 ou $= 1$.
No caso dos parâmetros negativos é necessário compor ainda com a reflexão relativamente ao plano coordenado definido pelas outras 2 variáveis. Por exemplo, se $c < -1$ a transformação efetua uma dilatação de razão $|c|$ segundo o eixo dos zz seguida de uma reflexão relativamente ao plano XOY. **UFF!**

Capítulo 2

Espaços vetoriais

EXERCÍCIOS 13.

1. Determine e interprete geometricamente os espaços nulos das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

a) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{4}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(-4, 3)$

b) $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0)\}$ - subespaço minimal

c) $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2$ - subespaço maximal

d) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3,\ x_2 = 2x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-1, 2, 1)$

e) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{2}{5}x_3,\ x_2 = \frac{1}{5}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-2, 1, 5)$

f) $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ - subespaço minimal

g) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 4x_3,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(4, 3, 1)$

h) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2x_2 - 2x_3,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ - plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetores diretores $(2, 1, 0)$ e $(-2, 0, 1)$.

i) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ - reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(3, 1)$

2. Escreva $(-3,12,12)$ como combinação linear dos vetores $v_1=(-1,3,1)$, $v_2=(0,2,4)$ e $v_3=(1,0,2)$.

   $(-3,12,12)=2v_1+3v_2-v_3$

3. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u=(3,-5)$, $\quad V=\{(1,2),(-2,6)\}$;
      É C.L.

   b) $u=(1,1,1)$, $\quad V=\{(1,0,1),(0,3,5)\}$;
      Não é C.L.

   c) $u=(2,-2,\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, $\quad V=\{(1,-1,0,0),(2,0,1,1),(0,3,1,1)\}$;
      É C.L.

   d) $u=(0,1,0,1,0)$, $\quad V=\{(1,2,2,1,1),(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},1,\frac{2}{3})\}$.
      Não é C.L.

4. Averigue se $(0,1,4)\in\langle(1,3,-5),(2,9,4)\rangle$ e interprete geometricamente a situação.

   $(0,1,4)\notin\langle(1,3,-5),(2,9,4)\rangle$. De facto, este subespaço gerado define um plano que passa na origem de equação $19x-\frac{14}{3}y+14z=0$ (verifique) e $(0,1,4)$ não satisfaz esta equação.

5. Justifique que $(3,1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ e escreva-o como combinação linear das colunas dessa matriz.

   $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=(1-\frac{12}{5}\alpha_3)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}+(-1+\frac{1}{5}\alpha_3)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$, com $\alpha_3\in\mathbb{R}$.

6. Determine e interprete geometricamente os espaços de colunas das matrizes consideradas na alínea 1.

   a) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2): b_2=-2b_1,\ b_1\in\mathbb{R}\}$
   b) $\mathscr{C}(A)=\mathbb{R}^2$
   c) $\mathscr{C}(A)=\{(0,0)\}$
   d) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2,b_3): b_3=b_2+b_1,\ b_1\in\mathbb{R},\ b_2\in\mathbb{R}\}$
   e) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2,b_3): b_3=b_2+2b_1,\ b_1\in\mathbb{R},\ b_2\in\mathbb{R}\}$
   f) $\mathscr{C}(A)=\mathbb{R}^3$
   g) $\mathscr{C}(A)=\mathbb{R}^2$
   h) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2): b_2=3b_1,\ b_1\in\mathbb{R}\}$
   i) $\mathscr{C}(A)=\{(b_1,b_2,b_3): b_2=3b_1,\ b_3=2b_1,\ b_1\in\mathbb{R}\}$

EXERCÍCIOS 14.

1. Decida sobre a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(3,1),(4,-2)\}$
      l.i.

   b) $\{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$
      l.d.

   c) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$
      l.d.

   d) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5),(0,0,0,1)\}$
      l.d.

   e) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$.
      l.i.

2. Decida sobre a independência linear dos conjuntos de vetores,
   $U = \{(1,2,-1,0),(0,2,1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$ e
   $U' = \{(1,2,-1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$

   U l.i. e U' l.i.

3. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1,0,3,1),(-1,1,0,1),(2,3,0,0),(1,1,6,3)\}$ é linearmente dependente. Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

   Não, pois $(2,3,0,0)$ não é C.L. dos restantes vetores.

4. Discuta, em função de $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,-2),(\alpha,-1)\}$
      l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$.

   b) $\{(\alpha,1,1),(1,\alpha,1),(1,1,\alpha)\}$
      l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq -2,1$.

   c) $\{0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\}$.
      l.d. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

5. Sejam $\{v_1,v_2,v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^n$ e $u_1 = v_1+v_2$, $u_2 = v_1+v_3$ e $u_3 = v_2+v_3$. Justifique que $\{u_1,u_2,u_3\}$ é também linearmente independente.

EXERCÍCIOS 15.

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1,-1),(3,0)\}$
      Sim.

b) $U = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$
Não.

c) $W = \{(1,1),(8,8)\}$.
Sim.

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

a) $V = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,2)\}$
Sim.

b) $U = \{(1,0,1),(2,4,8)\}$
Não.

c) $W = \{(3,0,1),(1,1,1),(4,1,2)\}$.
Não.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha, 6, -1)$, $v_2 = (1, \alpha, -1)$ e $v_3 = (2, \alpha, -3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.
$\alpha \neq -\frac{3}{3}$ e $\alpha \neq 2$.

b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1,1,2)$ em relação à base correspondente.
Assumindo $\alpha = 0$ vem $(-1,1,2) = \frac{1}{6}v_1 + \frac{4}{3}v_2 - \frac{7}{6}v_3$.

EXERCÍCIO 16. Determine uma base para o espaço nulo de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,-3,1,0),(2,-4,0,1)\}$.
b) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0)\}$.
c) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,0,0),(0,-2,-1)\}$.
d) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0,0,0),(3,0,-2,1,0),(-7,0,4,0,1)\}$.
e) Possível base para o espaço nulo ($\mathbb{R}^2$): $\{(1,0),(0,1)\}$ (base canónica).

EXERCÍCIO 17. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

a) Mostre que V é subespaço vetorial.

b) Indique uma base de V.

Uma possível base é $\{(1,1,0,0),(-6,0,2,1)\}$.

EXERCÍCIOS 18. Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1+4x_2-2x_3=0$.

   Uma possível base é $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$.

2. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1-6x_2+3x_3-2x_4+9x_5=0$.

   Uma possível base é$\{(2,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(\frac{2}{3},0,0,1,0),(-3,0,0,0,1)\}$.

EXERCÍCIO 19. Determine uma base para o espaço das colunas de cada uma das matrizes do exercício 16.

a) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,0),(0,1)\}$.
b) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,1),(3,5)\}$
c) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3)\}$.
d) Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3),(1,3,4)\}$
e) Possível base para o espaço das colunas ($\{(0,0,0)\}$): $\{\}$ (por convenção).

EXERCÍCIO 20.

1. Calcule $\dim S$, com $S=<\{(1,0,1),(1,-1,0),(3,-1,2)\}>$ e $S=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$.

   2 e 3.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço $S=<\{(1,\alpha,-1),(-1,1,1),(\alpha,0,-1)\}>$ é 3?

   $\alpha\neq -1,1$.

EXERCÍCIO 21. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

a) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$

   Uma possível base é $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$ e a dimensão é 4.

b) $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0),(5,6,2,0)\}$

   Uma possível base é $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0)\}$ e a dimensão é 4.

EXERCÍCIO 22. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}.$$

a) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

Uma possível base é $\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1)\}$.

c) Escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

$(-2,3,4) = (1,0,5) - 3(1,1,1) + 2(0,3,1)$.

EXERCÍCIO 23. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \,]$.

1. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?

   $\alpha = -2$ e $\alpha = 1$.

2. Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

   Uma possível base para $\mathbb{R}^3$ é $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$.

EXERCÍCIOS 24.

1. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{N}(A)$ e $\mathscr{N}(A^T)$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

$\dim \mathscr{C}(A)$	3	2	1	2	2	0	2
$\dim \mathscr{N}(A)$	0	1	2	7	3	4	0
$\dim \mathscr{N}(A^T)$	0	1	2	3	7	4	4

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

   Não. Tem que ser uma reta que passa na origem (Porquê?).

EXERCÍCIOS 25.

1. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,1,1)$.

   Uma possível base é $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Verifique que $v = (0,3,3,-1)$ pertence a $\mathcal{N}(A)$ e indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que inclua v.

   Uma possível base é $\{(-1,1,1,0),(0,3,3,-1)\}$.

3. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.

      $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2x_3 - x_4,\ x_2 = x_3 - 2x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\}$, cuja dimensão é 2 (número de variáveis livres).

   b) Mostre que $\{(1,2,0,-1)$ e $(-1,3,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

   c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = x_3\}$

   (a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analitica e geometricamente.

      $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_3,\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{N}(A)$ define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém a direção $(1, -\frac{1}{2}, 1)$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de V.

      $\dim(V) = 2$ e uma possível base para V é $\{(0,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$.

   (c) Mostre que $\mathscr{C}(A) = V$.

      Uma possível forma é verificar que $\mathscr{C}(A) \subset V$ e que $\dim \mathscr{C}(A) = \dim V\ldots$

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

   a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique uma base de S.

Uma possível base é $\{(-\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{2}, 0, 1)\}$.

c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

Por exemplo $(0, 1, -1)$.

d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 26.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

   (a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

   $\mathscr{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_2 = 2b_3 - 3b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$. Trata-se de um hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem.

   (b) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

   Uma possível base é $\{v_1, v_2, v_3\}$ e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$ é 3.

   (c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathscr{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathscr{C}(A)$ indicada em b).

   $y = 0v_1 - 2v_2 + v_3$.

   (d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathscr{C}(A)$.

   Por exemplo $(1,0,0,0)$ (Justifique!)

   (e) Indique $\dim \mathscr{N}(A)$.

   $\dim(\mathscr{N}(A)) = 0$.

   (f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathscr{C}(A)$? Justifique.

   Não! Todas as bases para $\mathscr{C}(A)$ possuem 3 vetores.

   (g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.

   Determinado.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $\mathscr{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.

   $\mathscr{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_2 + x_3,\ x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ Define o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém as direções $(-1,1,0)$ e $(1,0,1)$.

   (b) Indique uma base para $\mathscr{C}(A)$.

   Uma possível base é $\{(1,-1,2)\}$.

   (c) Indique $\text{car}(A)$.

   $\text{car}(A) = \dim \mathscr{C}(A) = 1$.

   (d) Mostre que $\mathscr{N}(A) = \langle (-1,1,0), (1,0,1) \rangle$.

3. Considere $V = \langle (1,1,0), (-1,1,1), (1,3,1) \rangle$.

(a) Indique $\dim V$.

$\dim(V) = 2$.

(b) Mostre que $(2,4,1) \in V$.

(c) Indique uma matriz A tal que $\mathscr{C}(A) = V$.

Por exemplo, $A = [v_1\ v_2]$ onde $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ (indique outra possível matriz).

4. Considere os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,3,1)$.

(a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v\rangle = \langle w, z\rangle$.

Por exemplo, $z = u - v$ e $w = u + v$.

(b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathscr{C}(A) = \langle u, v\rangle$.

(c) Determine $\mathscr{N}(A)$.

$\mathscr{N}(A) = \langle(-1,-1,1)\rangle$ para a matriz indicada em b).

5. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,-1,0)$ e $v_4 = (1,1,0)$.

(a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

Não (4 vetores de $\mathbb{R}^3$ são sempre l.d.)

(b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathbb{R}^3$?

Sim.

(c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$\{v_1, v_2, v_4\}$.

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base $\mathscr{N}(\mathscr{A})$.

$\{(3,1)\}$.

b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

$(1,0)$.

c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathscr{N}(\mathscr{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$.

d) Interprete geometricamente os resultados obtidos nas alíneas anteriores e conclua que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.

Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

EXERCÍCIOS 27.

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

   a) $\sqrt{6}$, **b)** $\sqrt{1+\pi^2}$, **c)** 6

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

   a) $\sqrt{5}$, **b)** 3, **c)** $\sqrt{51}$

3. Considere $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,1,-1)$.

   (a) Determine os vectores de $\mathbb{R}^3$ que são simultaneamente ortogonais a v_1 e v_2.

   (b) Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a v_1 e v_2.

   a) $\{(-x_3,2x_3,x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,2,1)\rangle$ **b)** $\text{vers}(-1,2,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, ou, em alternativa, $-\text{vers}(-1,2,1)) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

EXERCÍCIOS 28.

1. Justifique que $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1,0,0,2),\ (-1,0,2,0),\ (-1,2,0,0),\ (1,1,1,4).$$

2. Verifique que $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 29.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) $\{(x_1,x_2): x_1=2\,x_2,\ x_2\in\mathbb{R}\}=\langle(2,1)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com vetor diretor $(2,1)$ e é perpendicular à reta que passa na origem com vetor diretor $(1,-2)$, definida pelo espaço de colunas da matriz.
(b) $\{(x_1,x_2,x_3): x_1=-2\,x_3,\ x_2=-\frac{3}{2}\,x_3,\ x_3\in\mathbb{R}\}=\langle(-4,-3,2)\rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(-4,-3,2)$ e é perpendicular ao plano que passa na origem com vetores diretores $(1,0,2)$ e $(-1,2,1)$, definido pelo espaço de colunas da matriz.
(c) $(\mathbb{R}^3)^\perp=\{\vec{0}\}$ (o complemento ortogonal do subespaço maximal de $\mathbb{R}^3$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^3$).
(d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=-2\,x_2-3\,x_3-4\,x_4,\ x_2\in\mathbb{R},\ x_3\in\mathbb{R},\ x_4\in\mathbb{R}\}=$ $\langle(-2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-4,0,0,1)\rangle$ que define o hiperplano de $\mathbb{R}^4$.
(e) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=-3\,x_3+3\,x_4,\ x_2=-2\,x_3+2\,x_4,\ x_3\in\mathbb{R},\ x_4\in\mathbb{R}\}=$ $\langle(-3,-2,1,0),(3,2,0,1)\rangle$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1,2,2,1),(1,0,2,0)\}$ e por $\{(1,1,2,-1)\}$.

$\langle(1,2,2,1),(1,0,2,0)\rangle^\perp=\langle(-2,0,1,0),(0,-1,0,2)\rangle$
$\langle(1,1,2,-1)\rangle^\perp=\langle(-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   (a) $<\{(1,1)\}>$.

   (b) $<\{(1,1,3),(1,1,2)\}>$.

   (c) $<\{(1,1,0,0),(0,2,4,5)\}>$.

   (d) $<\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1)\}>$.

   (a) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1)\}$.
   (b) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1,0)\}$.
   (c) A dimensão é 2 e uma possível base é $\{(2,-2,1,0),(5,-5,0,2)\}$.
   (d) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(0,-1,2,4)\}$.

4. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1,1,3),(1,1,2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

   Uma possível base é $\{(1,1,3),(1,1,2),(-1,1,0)\}$.

EXERCÍCIO 30. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ e o vetor $b=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

Justifique por definição de projeção que $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 31.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)$ para todo o $a,b,c\in\mathbb{R}$.
   $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)=(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)=(0,0,0)$ $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

2. Considere $V=<\{(1,0,1),(0,1,1)\}>$. Averigue se $b=(1,1,2)\in V$ e calcule as projeções $\text{proj}_V(b)$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)$.
   Pertence, tendo-se portanto $\text{proj}_V(b)=b$ e $\text{proj}_{V^\perp}(b)=\vec{0}$.

EXERCÍCIOS 32.

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.

   $\text{proj}_{(3,1)}((2,3))=\left(\frac{27}{10},\frac{9}{10}\right)$.

2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$ e sobre o seu complemento ortogonal.

   $\text{proj}_{\langle(1,-1,3)\rangle}((6,5,4))=\left(\frac{13}{11},-\frac{13}{11},\frac{39}{11}\right)$ e $\text{proj}_{\langle(1,-1,3)\rangle^\perp}((6,5,4))=\left(\frac{53}{11},\frac{68}{11},\frac{5}{11}\right)$.

EXERCÍCIOS 33.

1. Considere o vetor $b=(4,-1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$U=\{(x,y,z): x+y+z=0\} \quad \text{e} \quad V=<(1,0,1),(0,1,1)>.$$

   (a) Determine as projeções ortogonais de b sobre $U^\perp$, U, $V^\perp$ e V.
   $\text{proj}_{U^\perp}(b)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.
   $\text{proj}_{U}(b)=\left(\frac{8}{3},-\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$.
   $\text{proj}_{V^\perp}(b)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.
   $\text{proj}_{V}(b)=\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

   (b) Calcule as distâncias de b a U e a V.
   $d(b,U)=\|\text{proj}_{U^\perp}(b)\|=\left\|\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\right\|=\left|\frac{4}{3}\right|\,\|(1,1,1)\|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.
   $d(b,V)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

   (c) Identifique o vetor de V a menor distância do vetor b.
   O vetor de V a menor distância de b é $\text{proj}_V(b)=\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

2. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.

   $\text{proj}_{\langle(1,1,0,2),(-1,0,0,1)\rangle}((0,2,5,-1))=\left(\frac{7}{11},\frac{1}{11},0,-\frac{4}{11}\right)$.

3. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$

   e o vetor $v=(2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.

   $\text{proj}_U((2,1,0,1))=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\text{proj}_{U^\perp}((2,1,0,1))=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

4. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.

$$P=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Considere o vetor $w=(1,-2,2,2)$ e o subespaço $V=<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.

   (a) Defina a matriz de projeção P sobre o subespaço V.

$$P=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

   (b) Determine a projeção de w sobre V.
   $\text{proj}_V(w)=Pw=(1,-2,2,2)$.

6. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$, com característica n e $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

   (a) $P^\top = P$ (P é simétrica).

   (b) $P^2 = P$ (P é idempotente).

7. Verifique que $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y, z = t\}$.

8. Considere os vetores $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.

   (a) Justifique que $\{u, v\}$ é base ortogonal do subespaço V de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores u e v.

   (b) Determine a projeção ortogonal do vetor b sobre V.
   $\text{proj}_{\langle u,v\rangle}(b) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$.

9. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

   (a) Mostre que $\{a, b, c\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear de a, b e c.
   $(0, 2, 4) = \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b + c$.

10. (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.
    Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

    (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
    Tomando os versores dos vetores da base anterior obtém-se a b.o.n,
    $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)\right\}$.

11. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

    (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.
    Uma possível base ortogonal é $\{(-1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 0), (-1, -1, 1, 3)\}$.

    (b) Seja $b = (2, 1, 0, 1)$. Calcule a projeção de b sobre o subespaço V.
    $\text{proj}_V(b) = (1, 0, 1, 0)$.

12. Considere $W = \langle (1,1,1,-1),(0,1,2,-1)\rangle$ e $b = (4,-1,0,3)$.

   (a) Determine uma base e a dimensão de $W^{\perp}$.

   Uma possível base é $\{(1,-2,1,0),(0,1,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

   (b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1,-1),(-1,0,1,0),(1,-2,1,0),(1,1,1,3)\}$.

   (c) Calcule $\text{proj}_{W^{\perp}}(b)$.

   $\text{proj}_{W^{\perp}}(b) = (2,-1,2,3)$.

   (d) Calcule as distâncias de b a W e $W^{\perp}$.

   $d(b,W) = \sqrt{18}$, $d(b,W^{\perp}) = \sqrt{8}$.

13. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais

   (a) $\langle (1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

   (b) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$

   Uma possível base ortogonal é
   $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3),(1,0,1,0),(1,-1,-1,1)\}$.

14. Considere $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, $v_3 = (1,-1,1,-1)$, $A = [\,v_1\ \ v_2\ \ v_3\,]$ e $b = (1,2,3,4)$. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual ?

   Uma possível solução dos mínimos quadrados, isto é, de $Ax = \text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)$, é $u = (-1,3,0)$, que não corresponde a uma solução de $Ax = b$ pois $Au \neq b$. De facto, tem-se $Au = \text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) \neq b$, pois $b \notin \mathscr{C}(A)$ (verifique).

Exercícios variados

EXERCÍCIO 34. Determine os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$(0,1,2,4)$ e $\left(-\frac{10}{3},-\frac{7}{3},2,\frac{2}{3}\right)$

EXERCÍCIOS 35.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{(1,0,-2),(0,1,6),(2,-1,2)\}$ e dimensão é 3.

   (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.
   $\mathbb{R}^3$

   (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?
   $\dim \mathscr{N}(A) = 0$.

   (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathscr{C}(A)$.
   $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(b) = b$.

2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

   (a) Indique uma base e a dimensão de V.
   Uma possível base é $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

   (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.
   $V^\perp = \langle (1,-1,0) \rangle$ que representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com a direção do vetor $(1,-1,0)$.

   (c) Calcule a matriz de projeção sobre V.
   $$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.

   (a) Qual a característica de A?
   $\text{car}(A) = 3$.

   (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.
   $\mathscr{N}(A) = \langle (2,3,1,0) \rangle$.

   (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathscr{N}(A)$.
   $$P = \frac{vv^T}{v^Tv} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ em que } v = (2,3,1,0).$$

   (d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathscr{N}(A)$.
   $\left\| \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

   (a) $\langle(1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,-1)\}$.

   (b) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

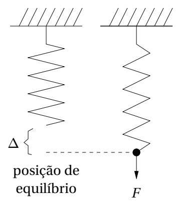
   (c) $\{(x,y,z): x+y=0,\ y+z=0\}$

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,-1,1)\}$.

   (d) $\{(x,y,z,w): x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$

   Uma possível base ortogonal é $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3)\}$.

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F=k\,x$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2=(F_1-k\,x_1)^2+\cdots+(F_6-k\,x_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.

A constante k é a solução no **sentido dos mínimos quadrados** do sistema sobredeterminado a 6 equações e uma variável k, $x\,k=F$, isto é, a solução no **sentido usual** do sistema $x\,k=\mathrm{proj}_x(F)$. Uma vez que $\mathrm{proj}_x(F)=\dfrac{F^Tx}{x^Tx}\,x$ com

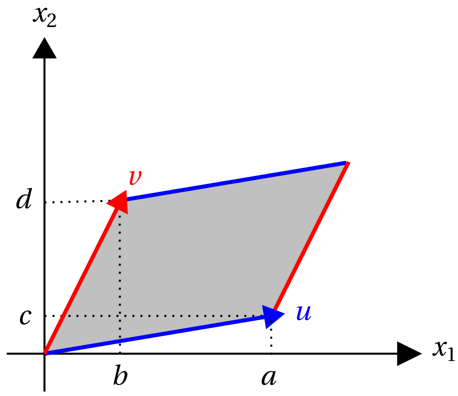
$$x=(0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.35),\quad \text{e} \quad F=(2.1,3.9,5.7,8.2,10.5,11.7),$$

obtém-se o valor aproximado da constante elástica, $k=\dfrac{F^Tx}{x^Tx}=32.31655$.

Capítulo 4

Determinantes

EXERCÍCIO 36. Considere o paralelogramo definido pelos vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$ da figura abaixo. Mostre, sem usar o conceito de determinante, que a sua área vem dada por $ad - bc$.



EXERCÍCIO 37. Sabendo que o volume da esfera de raio 1 é $\frac{4}{3}\pi$ deduza o volume da esfera de raio $r > 0$.

EXERCÍCIOS 38.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e interprete geometricamente o resultado obtido nas alíneas a), b) e c).

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) 1 **b)** 18 **c)** 0 **d)** 11 **e)** 65 **f)** 42

EXERCÍCIOS 39. Prove os seguintes resultados para matrizes 4×4.

1. O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz.

2. Uma matriz com linhas ou colunas de zeros tem determinante nulo.

3. Uma matriz com linhas ou colunas proporcionais tem determinante nulo.

EXERCÍCIO 40. [Exercício 14.4 (c) revisitado] Usando o conceito de deteminante discuta, em função de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear do conjunto de vetores $\{0, \gamma, -\beta), (-\gamma, 0, \alpha), (\beta, -\alpha, 0)\}$.

É l.d. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

EXERCÍCIO 41. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indique os valores de α para os quais:

a) A é invertível.

b) $\det(2A^{-1}) = 1$.

a) $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ **b)** $\alpha = \frac{3}{4}$

Capítulo 5

Valores e vetores próprios

EXERCÍCIO 42. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que $(1,5,10)$ é vetor próprio.

De facto, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ (com valor próprio $\lambda = 6$).

b) Verifique que 1 é valor próprio.

De facto, $p_A(1) = \det(A - I) = 0$ pois tem uma coluna de zeros.

EXERCÍCIO 43. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e determine os vetores próprios associados a -1.

De facto, $p_A(-1) = \det(A-(-1)I) = \det(A+I) = 0$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são os múltiplos não nulos do vetor $(0,1,1)$.

EXERCÍCIO 44. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A dimensão do subespaço próprio $E(\lambda)$ associado a um valor próprio λ é $m.g.(\lambda)$ e os vetores próprios associados a λ são os vetores não nulos de $E(\lambda)$, isto é, os vetores não nulos dos espaços gerados pelas respectivas bases, indicadas a seguir:

A:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	1	1	$\{(-1,1)\}$
2	1	1	$\{(1,0)\}$

B:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$-i$	1	1	$\{(-i,1)\}$
i	1	1	$\{(i,1)\}$

C:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	3	1	$\{(0,0,1)\}$

D:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(1,0,0)\}$
6	1	1	$\{(1,5,10)\}$

E:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$1-2\sqrt{2}$	1	1	$\{(\sqrt{2},-1,1)\}$
1	1	1	$\{(0,1,1)\}$
$1+2\sqrt{2}$	1	1	$\{(-\sqrt{2},-1,1)\}$

F:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
2	2	2	$\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$
4	1	1	$\{(1,1,0)\}$

G:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-2	1	1	$\{(0,0,1,0)\}$
1	2	1	$\{(1,0,0,0)\}$
2	1	1	$\{(0,0,0,1)\}$

EXERCÍCIO 45. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero.

$a = 1$

b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.

Para $a = 1$ os valores próprios de A são $\lambda = 0$ com $m.a.(0) = 1$ e $\lambda = 2$ com $m.a.(2) = 2$. Os vetores próprios associados a $\lambda = 0$ são os múltiplos não nulos de $(-1, 1, 0)$ e vetores próprios associados a $\lambda = 2$ são os múltiplos não nulos de $(0, 1, 1)$.

c) Discuta, em função do parâmetro a, a invertibilidade da matriz A.

Para $a \neq 1$ é invertível e para $a = 1$ é singular

EXERCÍCIO 46. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A.

a) Mostre que, para todo o real α, v é um vetor próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado.

O valor próprio associado é $\lambda - \alpha$.

b) Mostre que, para todo o inteiro n, v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado.

O valor próprio associado é λ^n.

EXERCÍCIO 47. Indique, justificando, quais das matrizes do exercício 44 são diagonalizáveis.

A sim, B sim, C não, D não, E sim, F sim, G não.

EXERCÍCIO 48. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

Admite os valores próprios 0 e 1 com multiplicidades algébricas 1 e 2, respectivamente.

b) Indique um vetor próprio de A.

Por exemplo, $(0,1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$.

d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

Não, porque $m.g.(1) < m.a.(1)$ (verifique).

EXERCÍCIO 49. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A: $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \text{diag}(-4,1,3)$.

B: $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}BP = \text{diag}(0,2,2)$.

C: $P = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}CP = \text{diag}(-4,1,6)$.

EXERCÍCIO 50. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1 multiplicidade algébrica 2 e vetores próprios $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ associados ao valor próprio 1.

a) Justifique que A é diagonalizável.

b) Determine A assumindo que $(-1,1,0)$ é também vetor próprio de A associado ao valor próprio 2,

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 51. Considere $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$.

1. Justifique que A é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização para A.

   Possível matriz de diagonalização é $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Calcule A^{10}.

   $$\begin{bmatrix} 4093 & 2046 \\ -6138 & -3068 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO 52. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

a) Indique uma matriz de diagonalização.

$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-\frac{1}{5}, 1)$.

b) Prove que $\lim_{n \to +\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 53. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \frac{1}{4})$.

b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 54.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.
   $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \text{diag}(0,3)$.

   b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?
   $a = 1$

   c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.
   Não, porque não têm o mesmo traço.

2. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, tendo-se $P^TAP = \text{diag}(2,2,8)$.

3. Prove os seguintes resultados.

   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.

   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de v^TAv.

Capítulo 6

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 55. Considere o problema de problema de programação linear,

$$\begin{array}{lrcl}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 & & \\
\text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

É o polígono de vértices $(0,0)$, $(8,0)$, $(8,2)$, $(3,7)$ e $(0,8)$.

b) Determine e represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis cujo valor da função objectivo é 8.

$\{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = 600,\ 0 \leq x_1 \leq 8\}$.

c) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

$x_1 = 3$, $x_2 = 7$ é a única solução óptima e o correspondente valor da função objectivo é 17. As restrições saturadas são a primeira e a segunda.

d) Considere a função objetivo $z = x_1 + a\, x_2$ com $a > 0$. Indique o intervalo de variação do parâmetro a que mantém óptima a solução que indicou na alínea c).

$a \in [1, 3]$.

EXERCÍCIOS 56.

1. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (€/kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta. Formule e resolva o problema em termos de programação linear.

Denotando por x_1 e x_2 as variáveis de decisão que representam a quantidade, em kg, de café de lote A e B, respectivamente, o problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{lrl} \max & 3.5x_1 + 5.0x_2 & \\ \text{s.a} & 0.25x_1 + 0.25x_2 & \leq 100 \\ & 0.75x_1 + 0.25x_2 & \leq 150 \\ & 0.5x_2 & \leq 175 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Devem ser produzidos 50 kg de café do lote A e 350 kg de café do lote B, que originam uma receita bruta máxima de 1925 €.

2. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 €. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

   a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

      Solução: sejam x_1 e x_2 as variáveis que representam a quantidade a transportar, em toneladas, dos produtos P1 e P2, respectivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{lrl} \max & 2000x_1 + 3000x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq 1.5 \\ & 0.5x_1 + 2x_2 & \leq 1 \\ & 1.5x_1 + 4x_2 & \geq 2.5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

A solução indicada satisfaz todas as restrições funcionais e de sinal (verifique), permitindo combater uma área de 2.5 ha.

EXERCÍCIO 57. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 € e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (€)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 euros por hectare de terreno destinado a área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende-se determinar a área a destinar a cada tipo de ocupação de solo por forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{ll} \max & 40x + 80y + 60z \\ \text{s.a} & x + y + z \leq 100 \\ & 100x + 300y + 400z \leq 30000 \\ & 100x + 150y + 500z \leq 20000 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

em que x, y e z representam, respectivamente, os hectares destinados à área florestal, à reserva de caça e ao parque de campismo.

b) Utilize o suplemento de otimização `Solver` incluído no editor de folha de cálculo `Excel`® para determinar uma solução ótima do problema.

Para uma implementação no Excel usando o Solver ver **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

c) Resolva novamente o problema usando o `Solver` do programa `Excel`, assumindo adicionalmente que 40 ha de terreno são destinados à reserva de caça.

Uma solução destina 40 ha do terreno para floresta e 20 ha para o parque de campismo, proporcionando um lucro máximo de 6000 €.

d) Confirme analiticamente a solução obtida na alínea anterior.

EXERCÍCIO 58. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12 € e 8 € e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{lrl} \text{max} & 12p_1 + 8p_2 & \\ \text{s.a} & 5p_1 + 2p_2 & \leq 80 \\ & p_2 & \leq 30 \\ & p_1, p_2 & \geq 0 \end{array}$$

em que p_1 e p_2 são, respectivamente, as toneladas de P_1 e P_2 a produzir semanalmente.

b) Represente graficamente a região admissível.
A região admissível é região de vértices $A = (0,0)$, $B = (0,30)$, $C = (4,30)$ e $D = (16,0)$.

c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

C, que representa a opção de produzir semanalmente 4 toneladas de P_1 e 30 de P_2, é solução óptima. A solução básica admissível correspondente é $(4,30,0,0)$.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

Entre 0 e 20 €.

EXERCÍCIO 59. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil €. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{llll} \min & 10x_h + 7x_A & & \\ \text{s.a} & 9x_h + 18x_A & \geq 72 & (P) \\ & 10x_h + 10x_A & \geq 50 & (O) \\ & 12x_h + 4x_A & \geq 24 & (H) \\ & x_h, x_A & \geq 0 & \end{array}$$

em que x_h e x_A são, respectivamente, o número de m a aumentar a altura da chaminé e o número de m^2 a aumentar a área dos filtros.

b) Represente graficamente a região admissível.

A região admissível é o polígono de vértices $A = (0,6)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, $C = (2,3)$ e $D = (8,0)$.

c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

A opção definida pelo vértice $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, que consiste em aumentar 1/2 m a altura da chaminé e 9/2 m^2 a área dos filtros, tem um custo mínimo de 36500€. A correspondente solução básica admissível é

$$(x_h, x_A, d_P, d_O, d_H) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 0, 0\right),$$

em que d_P, d_O, d_H são as variáveis de folga associadas às restrições (P),(O) e (H), respectivamente.

EXERCÍCIO 60. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{rl} \max & 200a+300b+400c+700d \\ \text{s.a} & a+4b+c+2d \leq 10 \\ & 15a+16b+20c+30d \leq 150 \\ & a \geq 2 \\ & a,b,c,d \geq 0 \end{array}$$

em que a, b, c e d são as quantidades, em toneladas, dos materiais dos tipos A, B, C e D, respectivamente, a armazenar.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

$$\begin{array}{rl} \max & 200a+300b+400c+700d \\ \text{s.a} & a+4b+c+2d+t=10 \\ & 15a+16b+20c+30d+e=150 \\ & a-a'=2 \\ & a,b,c,d,t,e,a' \geq 0 \end{array}$$

As variáveis de folga t, e e a' são os valores das diferenças entre o tempo de armazenagem, a área total ocupada e as toneladas de material do tipo A definidos por cada solução admissível e os membros direitos das restrições correspondentes.

c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

Para $a=2, b=0, c=3, d=2$ tem-se

$$\begin{array}{rl} a+4b+c+2d=9 & \leq 10 \\ 15a+16b+20c+30d=150 & \leq 150 \\ a=2 & \geq 2 \\ a,b,c,d & \geq 0 \end{array}$$

que mostra que $(2,0,3,2)$ é solução admissível. Na forma *standard* a solução correspondente é $a=2, b=0, c=3, d=2, t=1, e=0, a'=0$, com mais do que 3 variáveis não nulas, o que permite concluir que $(2,0,3,2,1,0,0)$ não é sba e portanto que $(2,0,3,2)$ não é vértice.

d) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 0 de C e 4 de D corresponde a um vértice da região admissível.

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Pode encontrar uma implementação deste exercício usando o Solver do Excel em **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 61. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{rll}
\max & 8x_{A1}+5x_{A2}+7x_{A3}+6x_{B1}+4x_{B2}+10x_{B3} & \\
\text{s.a} & x_{A1}+x_{A2}+x_{A3} & \leq 60 \\
 & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3} & \leq 30 \\
 & x_{A1}+x_{B1} & = 20 \\
 & x_{A2}+x_{B2} & \geq 50 \\
 & x_{A1},x_{A2},x_{A3},x_{B1},x_{B2},x_{B3} & \geq 0
\end{array}$$

em que $x_{K\,i}$ é a quantidade, em toneladas, de mercadoria a ser transportada do armazém K $(K=A,B)$ para o cliente i $(i=1,2,3)$.

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

Armazém	Cliente 1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

A opção $x_{A1}=20, x_{A2}=40, x_{A3}=0, x_{B1}=0, x_{B2}=10, x_{B3}=20$ é admissível pois satisfaz as restrições lineares e de sinal da formulação da alínea a) (verifique), originando um lucro de 600€.

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

$$\begin{array}{lll} \max & 8x_{A1}+5x_{A2}+7x_{A3}+6x_{B1}+4x_{B2}+10x_{B3} & \\ \text{s.a} & x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+F_1 & =60 \\ & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+F_2 & =30 \\ & x_{A1}+x_{B1} & =20 \\ & x_{A2}+x_{B2}-F_3 & =50 \\ & x_{A1},x_{A2},x_{A3},x_{B1},x_{B2},x_{B3},F_1,F_2,F_3 & \geq 0 \end{array}$$

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível do problema.

O sistema de equações que define a região admissível $\mathscr{F}$ do problema na forma *standard* é representado pela matriz ampliada,

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_{A1} & x_{A2} & x_{A3} & x_{B1} & x_{B2} & x_{B3} & F_1 & F_2 & F_3 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 50 \end{array}$$

Calculando as folgas associadas à solução

$$x_{A1}=20,\ x_{A2}=40,\ x_{A3}=0,\ x_{B1}=0,\ x_{B2}=10,\ x_{B3}=20,$$

obtém-se $F_1=F_2=F_3=0$. Logo a solução correspondende da região admissível na forma *standard* $\mathscr{F}$ é $(20,40,0,0,10,20,0,0,0)$ e a submatriz das colunas associadas às 4 variáveis não nulas da solução anterior é

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det M \neq 0$ (verifique), a solução admissível $(20,40,0,0,10,20,0,0,0)$ é também básica e portanto $(20,40,0,0,10,20)$ é um vértice do poliedro definido pelas restrições da alínea a).

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Sugestão: adapte a implementação no Solver da solução do exercício 57 que pode encontrar no **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 62. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P} \end{array}$$

$$\text{em que} \qquad \mathscr{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & \geq & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \qquad & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

$$\begin{array}{l} \mathscr{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) : \\ \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 & = & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 \quad - x_6 & = & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \qquad\qquad + x_7 & = & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0\}. \end{array} \end{array}$$

b) Verifique que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ e indique o valor da função objectivo em v.

Para vermos que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ temos que mostrar que o ponto de $\mathscr{F}$ que lhe corresponde, $\bar{v} = (2, 3, 0, 0, 0, 0, 1)$, é solução básica admissível...

O valor da função objectivo correspondente ao vértice v é igual a 7.