Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1.

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Simplifique e calcule, sempre que possível, as seguintes expressões.

   a) $(5A-A)-(B-2B)$ b) $(2A-B)^\top - C$ c) $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$
   d) $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$ e) $D+D^\top$ f) $D-D^\top$.

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 2. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, u=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } v=\begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, BI e IB onde I denota a matriz identidade de ordem conveniente, $u^\top u$, $u\,u^\top$, Bu, Bv, $B[\,u \;\; v\,]$, $B(u+v)$ e B^3.

EXERCÍCIOS 3. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 6 \\ 2x_1+5x_2+x_3 = 9 \\ x_1+4x_2-6x_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ x+y+z = 10 \\ x+2z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 4 \\ 2x_1+4x_2-x_3+2x_4 = 11 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5 = 2 \\ x_3+x_4+x_5 = -1 \\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 1 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4 = 9 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4 = -6 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4 = 7 \end{cases}.$

EXERCÍCIOS 4.

1. Considere $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   Resolva a equação matricial $Ax=3x+b$, com $x\in\mathbb{R}^3$.

2. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.

   Determine os valores de α para os quais $(-1,0,2,1)$ é solução do sistema $Ax=\vec{0}$.

3. Seja $Ax=b$ um sistema que admite soluções não nulas u e v. Para que valores de b o vetor $u+v$ ainda é solução de $Ax=b$? Justifique.

EXERCÍCIOS 5.

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 6x_2 &= b \end{cases}$$

é impossível?

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \end{cases}$$

de forma a obter um sistema impossível.

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

a) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

EXERCÍCIOS 6.

1. Discuta cada um dos seguintes sistemas lineares para todos os valores dos parâmetros.

a) $\begin{cases} x - z &= 1 \\ y + az &= 0 \\ -x + y + 2az &= 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 2x_3 &= \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 &= 1 \end{cases}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} ax \quad +2z = 2 \\ x+2y \quad = 1 \\ x-2y+bz = 3 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} 2x \quad +4y+bz = 2 \\ x+(d+2)y \quad = 1 \\ x \quad +2y+bz = 1 \\ x \quad +2y \quad = c \end{cases}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$

(Exercício do 1º teste de 12 de novembro de 2022)

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 7. Considere os sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que tornem o sistema

 c1) impossível,

 c2) indeterminado.

EXERCÍCIOS 8.

1. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

 a) Quantos *pivots* podem existir em E?

 b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $n - m$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   d) Se S é possível e $m \geq n$, então S é determinado.

   e) Se S é possível e determinado então $m = n$ e a matriz reduzida obtida por aplicação do método de Gauss à matriz dos coeficientes de S é a matriz identidade.

EXERCÍCIO 9. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 10.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

3. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A + B$ é invertível?

   b) Será que a matriz $A^3 B C^{-1}$ é invertível?

   c) Prove que se $AB = AC$ então $B = C$.

5. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?

   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

6. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.

   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.

   b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.

   c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

   $$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ respetivamente.}$$

   Determine a inversa de A em função dos vetores u, v e w.

7. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

   $$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

   em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \;\; 3\,]$.

   (a) Qual o tipo da matriz X?

   (b) Determine X.

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

   i) A é invertível.

   ii) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   iii) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIOS 11.

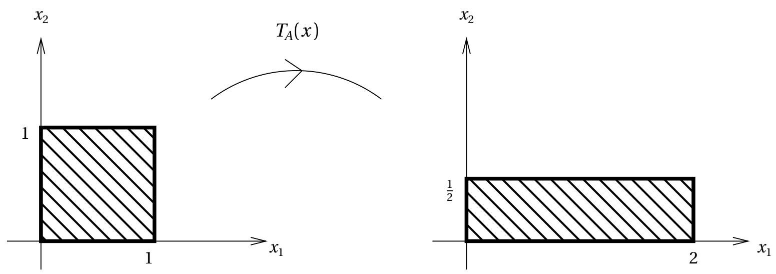
1. Considere a transformação linear $T_A(x) = Ax$, em que $A_{2\times 2}$ e $x \in \mathbb{R}^2$.

   Indique matrizes $A_{2\times 2}$ de modo a que:

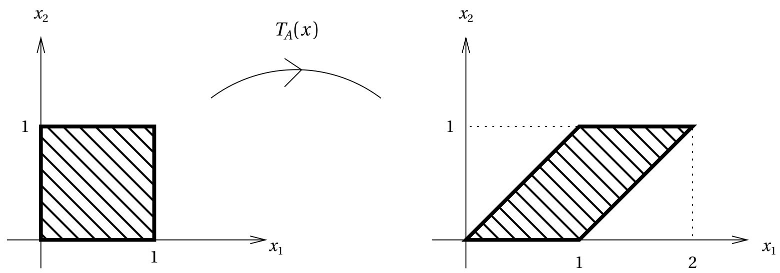
   (a) T_A defina a reflexão no plano relativamente ao primeiro eixo coordenado.

   (b) A acção de T_A no quadrado unitário definido pelos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ corresponda a cada uma das 3 situações ilustradas a seguir:

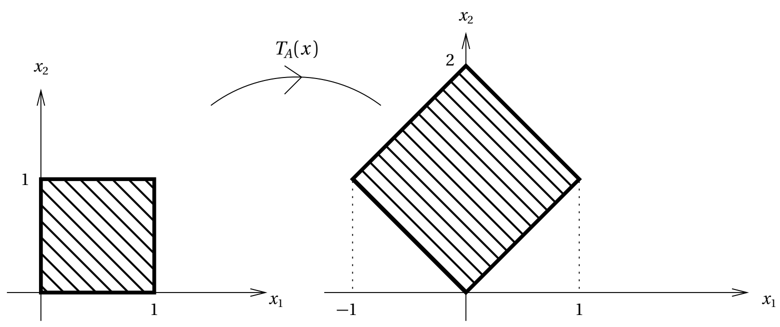
(i)



(ii)



(iii)



   Relativamente ao 3º caso, escreva a transformação que obteve como composição de duas transformações geométricas não triviais.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Interprete e comente a acção da transformação geométrica do plano definida por A no quadrado unitário (ver exercício anterior) e no paralelogramo definido pelos vetores $(1,0)$ e $(1,1)$.

3. Interprete o produto de matrizes AB usando uma transformação geométrica do plano, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Defina as rotações no espaço de θ radianos em torno do primeiro e do segundo eixos coordenados (no sentido direto).

5. Indique as matrizes das seguintes transformações lineares.

   (a) $T(x, y, z) = (2x + y, -y, x + y + z)$.

   (b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

   (c) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$.

6. Averigue quais das seguintes transformações lineares são invertíveis, indicando a respetiva inversa caso exista.

   (a) Rotação no plano no sentido anti-horário de θ radianos.

   (b) Projecção no espaço sobre o plano xOy.

   (c) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 12.

1. Calcule $A^2 + 3bb^\top$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Indique o conjunto de soluções dos sistemas lineares

   (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

3. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

admita a solução $(2, -1, 2)$.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^4$ para os quais $Ax = b$ é possível.

b) Qual é a característica de A?

c) Dê exemplo de um vetor c para o qual o sistema $Ax = c$ seja impossível.

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema $(A - \lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Indique a característica de $A - \lambda I$ em função de λ. Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

   b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

   c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções.

9. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 + \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

   b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

   c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

10. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Indique os valores de α, β para os quais A é invertível.

   (c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

11. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas invertíveis de ordem n. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações matriciais (em ordem a X):

   (a) $(C + X)A = D$.

   (b) $B(CA + 3X) = DX$.

   (c) $ABX = I$.

   (d) $3X + AX = I$.

(e) $(AB)^{-1}BAX = I$.

(f) $(X-A)^2 = B+(X-A)X$.

(g) $ABX(AB)^{-1} = I$.

(h) $BX + XA = I$.

12. Determine matrizes X e Y tais que $3X-2Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X+Y = 2I$.

13. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a inversa de A (caso exista).

   (b) Resolva a equação matricial $AX = B$.

14. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3 = 0$.
    Mostre que $I - A$ é invertível com inversa $I + A + A^2$.

15. Escreva uma equação vetorial equivalente a

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

16. Interprete a transformação geométrica do plano, dita transformação *afim*,

$$T(x,y) = (x+a, y+b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

   e indique os valores de a e b para os quais a transformação é também linear.

17. Interprete a transformação geométrica do espaço definida pela matriz $A = \text{diag}(a,b,c)$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Espaços vetoriais

EXERCÍCIOS 13.

1. Determine e interprete geometricamente os espaços nulos das seguintes matrizes.

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Escreva $(-3, 12, 12)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (-1, 3, 1)$, $v_2 = (0, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 0, 2)$.

3. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u = (3, -5)$, $\quad V = \{(1, 2), (-2, 6)\}$;
   b) $u = (1, 1, 1)$, $\quad V = \{(1, 0, 1), (0, 3, 5)\}$;
   c) $u = (2, -2, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $\quad V = \{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 3, 1, 1)\}$;
   d) $u = (0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad V = \{(1, 2, 2, 1, 1), (\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3})\}$.

4. Averigue se $(0, 1, 4) \in \langle (1, 3, -5), (2, 9, 4) \rangle$ e interprete geometricamente a situação.

5. Justifique que $(3, 1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ e escreva-o como combinação linear das colunas dessa matriz.

6. Determine e interprete geometricamente os espaços de colunas das matrizes consideradas na alínea 1.

EXERCÍCIOS 14.

1. Decida sobre a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(3,1),(4,-2)\}$
   b) $\{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$
   c) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$
   d) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5),(0,0,0,1)\}$
   e) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$.

2. Decida sobre a independência linear dos conjuntos de vetores,
   $U = \{(1,2,-1,0),(0,2,1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$ e
   $U' = \{(1,2,-1,0),(2,-1,3,0),(1,1,1,1)\}$

3. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1,0,3,1),(-1,1,0,1),(2,3,0,0),(1,1,6,3)\}$ é linearmente dependente. Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

4. Discuta, em função de $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,-2),(\alpha,-1)\}$
   b) $\{(\alpha,1,1),(1,\alpha,1),(1,1,\alpha)\}$
   c) $\{0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\}$.

5. Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^n$ e $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ e $u_3 = v_2 + v_3$. Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é também linearmente independente.

EXERCÍCIOS 15.

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1,-1),(3,0)\}$
   b) $U = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$
   c) $W = \{(1,1),(8,8)\}$.

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) $V = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,2)\}$
   b) $U = \{(1,0,1),(2,4,8)\}$
   c) $W = \{(3,0,1),(1,1,1),(4,1,2)\}$.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha, 6, -1)$, $v_2 = (1, \alpha, -1)$ e $v_3 = (2, \alpha, -3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1, 1, 2)$ em relação à base correspondente.

EXERCÍCIO 16. Determine uma base para o espaço nulo de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 17. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

a) Mostre que V é subespaço vetorial.

b) Indique uma base de V.

EXERCÍCIOS 18. Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$.

2. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0$.

EXERCÍCIO 19. Determine uma base para o espaço das colunas de cada uma das matrizes do exercício 16.

EXERCÍCIO 20.

1. Calcule $\dim S$, com $S = < \{(1,0,1), (1,-1,0), (3,-1,2)\} >$ e $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço $S = < \{(1, \alpha, -1), (-1, 1, 1), (\alpha, 0, -1)\} >$ é 3?

EXERCÍCIO 21. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

a) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$

b) $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0),(5,6,2,0)\}$

EXERCÍCIO 22. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}.$$

a) Mostre que $V=\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

c) Escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

EXERCÍCIO 23. Seja $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[\,u_1\,|\,u_2\,|\,u_3\,]$.

1. Para que valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ o vetor $(\alpha,\alpha^2,2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?
2. Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

EXERCÍCIOS 24.

1. Seja A uma matriz do tipo $m\times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathscr{C}(A)$, $\mathscr{N}(A)$ e $\mathscr{N}(A^T)$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m\times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

EXERCÍCIOS 25.

1. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,1,1)$.
2. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Verifique que $v=(0,3,3,-1)$ pertence a $\mathscr{N}(A)$ e indique uma base de $\mathscr{N}(A)$ que inclua v.

3. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.

   b) Mostre que $\{(1,2,0,-1)$ e $(-1,3,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

   c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = x_3\}$

   (a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analitica e geometricamente.

   (b) Indique uma base e a dimensão de V.

   (c) Mostre que $\mathcal{C}(A) = V$.

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

   a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   b) Indique uma base de S.

   c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

   d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 26.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

   (a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

   (c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathscr{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathscr{C}(A)$ indicada em b).

   (d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathscr{C}(A)$.

   (e) Indique $\dim \mathscr{N}(A)$.

   (f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathscr{C}(A)$? Justifique.

   (g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $\mathscr{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.

   (b) Indique uma base para $\mathscr{C}(A)$.

   (c) Indique car(A).

   (d) Mostre que $\mathscr{N}(A) = \langle (-1,1,0), (1,0,1) \rangle$.

3. Considere $V = \langle (1,1,0), (-1,1,1), (1,3,1) \rangle$.

   (a) Indique $\dim V$.

   (b) Mostre que $(2,4,1) \in V$.

   (c) Indique uma matriz A tal que $\mathscr{C}(A) = V$.

4. Considere os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,3,1)$.

   (a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v \rangle = \langle w, z \rangle$.

   (b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathscr{C}(A) = \langle u, v \rangle$.

   (c) Determine $\mathscr{N}(A)$.

5. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,-1,0)$ e $v_4 = (1,1,0)$.

   (a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

   (b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$?

(c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) Determine uma base $\mathscr{N}(\mathscr{A})$.

   b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

   c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathscr{N}(\mathscr{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$.

   d) Interprete geometricamente os resultados obtidos nas alíneas anteriores e conclua que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.

Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

EXERCÍCIOS 27.

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

3. Considere $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,1,-1)$.

   (a) Determine os vectores de $\mathbb{R}^3$ que são simultaneamente ortogonais a v_1 e v_2.

   (b) Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a v_1 e v_2.

EXERCÍCIOS 28.

1. Justifique que $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1,0,0,2),\ (-1,0,2,0),\ (-1,2,0,0),\ (1,1,1,4).$$

2. Verifique que $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 29.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1,2,2,1),(1,0,2,0)\}$ e por $\{(1,1,2,-1)\}$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   (a) $<\{(1,1)\}>$.
   (b) $<\{(1,1,3),(1,1,2)\}>$.
   (c) $<\{(1,1,0,0),(0,2,4,5)\}>$.
   (d) $<\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1)\}>$.

4. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1,1,3),(1,1,2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

EXERCÍCIO 30. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Justifique por definição de projeção que $\mathrm{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 31.

1. Determine $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)$ e $\mathrm{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)$ para todo o $a,b,c \in \mathbb{R}$.

2. Considere $V = <\{(1,0,1),(0,1,1)\}>$. Averigue se $b = (1,1,2) \in V$ e calcule as projeções $\mathrm{proj}_V(b)$ e $\mathrm{proj}_{V^\perp}(b)$.

EXERCÍCIOS 32.

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.
2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$ e sobre o seu complemento ortogonal.

EXERCÍCIOS 33.

1. Considere o vetor $b=(4,-1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,
$$U=\{(x,y,z): x+y+z=0\} \quad \text{e} \quad V=<(1,0,1),(0,1,1)>.$$
   (a) Determine as projeções ortogonais de b sobre $U^\perp$, U, $V^\perp$ e V.
   (b) Calcule as distâncias de b a U e a V.
   (c) Identifique o vetor de V a menor distância do vetor b.
2. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.
3. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$
$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$
e o vetor $v=(2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.
4. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.
5. Considere o vetor $w=(1,-2,2,2)$ e o subespaço $V=<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.
   (a) Defina a matriz de projeção P sobre o subespaço V.
   (b) Determine a projeção de w sobre V.
6. Sejam A uma matriz do tipo $m\times n$, com característica n e $P=A(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.
   (a) $P^\top=P$ (P é simétrica).
   (b) $P^2=P$ (P é idempotente).
7. Verifique que $P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W=\{(x,y,z,t): x=y,\ z=t\}$.
8. Considere os vetores $u=(1,-1,0,1)$, $v=(0,1,0,1)$ e $b=(2,-1,0,1)$.
   (a) Justifique que $\{u,v\}$ é base ortogonal do subespaço V de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores u e v.

(b) Determine a projeção ortogonal do vetor b sobre V.

9. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

   (a) Mostre que $\{a, b, c\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear de a, b e c.

10. (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.

    (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

11. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

    (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.

    (b) Seja $b = (2, 1, 0, 1)$. Calcule a projeção de b sobre o subespaço V.

12. Considere $W = \langle (1, 1, 1, -1), (0, 1, 2, -1) \rangle$ e $b = (4, -1, 0, 3)$.

    (a) Determine uma base e a dimensão de $W^\perp$.

    (b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.

    (c) Calcule $\text{proj}_{W^\perp}(b)$.

    (d) Calcule as distâncias de b a W e $W^\perp$.

13. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais

    (a) $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$

    (b) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, \ x + z = 0\}$

14. Considere $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $A = [\, v_1 \ \ v_2 \ \ v_3 \,]$ e $b = (1, 2, 3, 4)$. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual ?

Exercícios variados

EXERCÍCIO 34. Determine os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 35.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

    (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

    (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?

    (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathscr{C}(A)$.

2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

    (a) Indique uma base e a dimensão de V.

    (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.

    (c) Calcule a matriz de projeção sobre V.

3. Considere uma matriz $A_{3\times4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.

    (a) Qual a característica de A?

    (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.

    (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathscr{N}(A)$.

    (d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathscr{N}(A)$.

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

    (a) $\langle(1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$

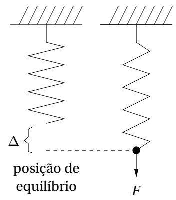
    (b) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$

    (c) $\{(x, y, z) : x + y = 0,\ y + z = 0\}$

    (d) $\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0,\ x + z = 0\}$

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = k\,x$ em que k é uma constante positiva

designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

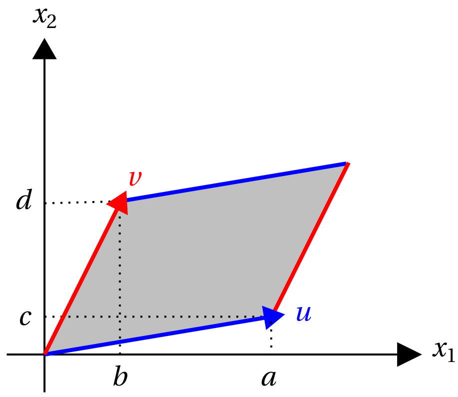
$$E^2 = (F_1 - k x_1)^2 + \cdots + (F_6 - k x_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.

Capítulo 4

Determinantes

EXERCÍCIO 36. Considere o paralelogramo definido pelos vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$ da figura abaixo. Mostre, sem usar o conceito de determinante, que a sua área vem dada por $ad - bc$.



EXERCÍCIO 37. Sabendo que o volume da esfera de raio 1 é $\frac{4}{3}\pi$ deduza o volume da esfera de raio $r > 0$.

EXERCÍCIOS 38.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e interprete geometricamente o resultado obtido nas alíneas a), b) e c).

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 39. Prove os seguintes resultados para matrizes 4×4.

1. O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz.
2. Uma matriz com linhas ou colunas de zeros tem determinante nulo.
3. Uma matriz com linhas ou colunas proporcionais tem determinante nulo.

EXERCÍCIO 40. [Exercício 14.4 (c) revisitado] Usando o conceito de deteminante discuta, em função de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear do conjunto de vetores $\{0, \gamma, -\beta), (-\gamma, 0, \alpha), (\beta, -\alpha, 0)\}$.

EXERCÍCIO 41. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indique os valores de α para os quais:

a) A é invertível.

b) $\det(2A^{-1}) = 1$.

Capítulo 5

Valores e vetores próprios

EXERCÍCIO 42. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que $(1,5,10)$ é vetor próprio.

b) Verifique que 1 é valor próprio.

EXERCÍCIO 43. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e determine os vetores próprios associados a -1.

EXERCÍCIO 44. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 45. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero.

b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.

c) Discuta, em função do parâmetro a, a invertibilidade da matriz A.

EXERCÍCIO 46. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A.

a) Mostre que, para todo o real α, v é um vetor próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado.

b) Mostre que, para todo o inteiro n, v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado.

EXERCÍCIO 47. Indique, justificando, quais das matrizes do exercício 44 são diagonalizáveis.

EXERCÍCIO 48. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Indique um vetor próprio de A.

d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

EXERCÍCIO 49. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 50. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1 multiplicidade algébrica 2 e vetores próprios $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ associados ao valor próprio 1.

a) Justifique que A é diagonalizável.

b) Determine A assumindo que $(-1,1,0)$ é também vetor próprio de A associado ao valor próprio 2,

EXERCÍCIO 51. Considere $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$.

1. Justifique que A é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização para A.

2. Calcule A^{10}.

EXERCÍCIO 52. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

a) Indique uma matriz de diagonalização.

b) Prove que $\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 53. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \dfrac{1}{4})$.

b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 54.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.

   b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?

   c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.

2. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Prove os seguintes resultados.

   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.

   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de $v^T Av$.

Capítulo 6

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 55. Considere o problema de problema de programação linear,

$$\begin{array}{lrcl} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

b) Determine e represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis cujo valor da função objectivo é 8.

c) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

d) Considere a função objetivo $z = x_1 + a\, x_2$ com $a > 0$. Indique o intervalo de variação do parâmetro a que mantém óptima a solução que indicou na alínea c).

EXERCÍCIOS 56.

1. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (€ /kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta. Formule e resolva o problema em termos de programação linear.

2. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 €. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

   a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

   b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

EXERCÍCIO 57. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 € e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (€)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 euros por hectare de terreno destinado a área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende-se determinar a área a destinar a cada tipo de ocupação de solo por forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Utilize o suplemento de otimização `Solver` incluído no editor de folha de cálculo `Excel`® para determinar uma solução ótima do problema.

c) Resolva novamente o problema usando o `Solver` do programa `Excel`, assumindo adicionalmente que 40 ha de terreno são destinados à reserva de caça.

d) Confirme analiticamente a solução obtida na alínea anterior.

EXERCÍCIO 58. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12€ e 8€ e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

EXERCÍCIO 59. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil €. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

EXERCÍCIO 60. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

d) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 0 de C e 4 de D corresponde a um vértice da região admissível.

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Pode encontrar uma implementação deste exercício usando o Solver do Excel em **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 61. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível do problema.

e) Utilizando o suplemento de otimização `Solver` do `Excel`®, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Sugestão: adapte a implementação no Solver da solução do exercício 57 que pode encontrar no **Outro Material** dentro do separador **Material de apoio** na página da disciplina no Fénix.

EXERCÍCIO 62. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P} \end{array}$$

$$\text{em que} \qquad \mathscr{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & \geq & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \qquad & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

b) Verifique que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ e indique o valor da função objectivo em v.