INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

5 de fevereiro de 2025 - Duração: 2h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)i	1b)ii	1c)	2a)	2b)	3a)	3b)
1,5	1	1	1,25	1,5	1,25	0,75	1,25

4a)	4b)	4c)	5a)	5b)i	5b)ii	6)	7a)	7b)	Total
1,5	1,25	1	0,75	1,5	1,25	1,25	0,5	1,5	20

[4.75v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Considere $\alpha = 1$,

i. Determine a inversa de A.

ii. Escreva $(0, 0, 1)$ como combinação linear das colunas de A.

(c) Considere $\alpha = 0$ e indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

[2.75v] 2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.

(b) Mostre que $\{(1, 1, 2, -1), (1, 2, 1, -2)\}$ é base de $\mathcal{C}(A)$.

[2v] 3. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^m$ tais que $\{u, v\}$ é linearmente independente e $A = [\, u \; v \; w \,]$ com $w = u + v$.

(a) Indique a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

(b) Determine uma base de $\mathcal{N}(A)$.

(Continua no verso)

[3.75v] 4. Considere $V = \langle (1,1,0,1), (2,0,-2,1) \rangle$ e $b = (0,4,1,2)$.

(a) Indique uma base ortogonal de V.

(b) Indique o vetor de V à menor distância de b.

(c) Indique um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ tal que $d(c, V) = 1$.

[3.5v] 5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais 1 é valor próprio de A.

(b) No que se segue considere $\alpha = 1$.

i. Determine os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

ii. Calcule um subespaço próprio de A e interprete-o geometricamente.

[1.25v] 6. Uma empresa necessita de transportar um determinado produto dos armazéns A1 e A2 para os postos de venda P1 e P2. As quantidades disponíveis nos armazéns são de 35 toneladas em A1 e 50 toneladas em A2, enquanto as necessidades dos postos de venda são de 40 toneladas em P1 e 30 toneladas em P2. O custo, em euros, de transporte de 1 tonelada de produto entre cada armazém e cada posto de venda encontra-se na tabela seguinte.

	P1	P2
A1	120	200
A2	150	170

Pretende-se determinar as quantidades a transportar de cada armazém para cada posto de venda de modo a minimizar o custo total do transporte. Formule o problema em termos de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

[2v] 7. Considere o problema de programação linear $\mathcal{P}$, escrito na sua forma *standard* indicada a seguir, em que f_1, f_2 e f_3 são as variáveis de folga:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 - 2x_3 + f_1 & = & 5 \\
& 3x_1 + x_2 - x_3 + f_2 & = & 9 \\
& x_1 + x_2 + 3x_3 - f_3 & = & 1 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3 & \geq & 0,
\end{array}$$

(a) Escreva uma formulação do problema $\mathcal{P}$ sem usar as variáveis de folga.

(b) Mostre que $(x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3) = (2, 3, 0, 0, 0, 4)$ é uma solução básica admissível do problema na forma *standard* e indique o vértice correspondente.