Análise Matemática

Davide Masoero

2024/2025

Aulas teórico-práticas

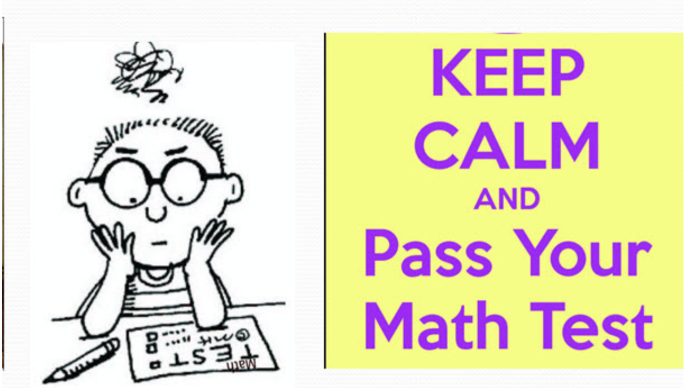
Informações

- Docente: Davide Masoero, davidem@isa.ulisboa.pt
- Horário de atendimento a/o aluna/o: Segunda-Feira 13h-14h, Gabinete 3.15 do Sertório
- A frequência é obrigatória para as/os alunas/ inscritas/os pela primeira vez para poderem fazer os testes (número máximo de faltas: 7 em 28 aulas).

Regras

- A aula começa com um questionário sobre a materia teórica da semana anterior.
- O resto do tempo vai servir para:
  - Tirarem dúvidas sobre a aula teórica e os TPC.
  - Resolverem os exercício que vão ser propostos pelo docente, de forma individual ou participativa.
  - Perguntem sempre que tenham dúvidas!
  - A participação nas atividades é obrigatória.

Questionário



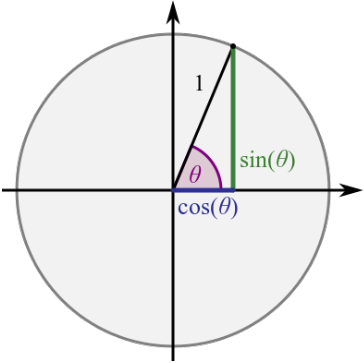
Regras dos questionários

- A resolução do questinário não é obrigatória.
- No entanto os questionários são vantajosos: são simples e valem o **30 %** da avaliação, para quem os resolver.
- Deve ser respondido individualmente.
- As resposta são registradas no Moodle com o telemóvel ou PC ou tablet (o docente distribui uma cópia em papel a quem não tem telemóvel).
- Duração do teste: 5 MINUTOS (passados os 5 minutos o moodle não deixa responder).

Inscrição no moodle

https://tinyurl.com/ILoveMathISA

senha: amat2025



$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Funções trigonométricas

- Seno é uma função diferenciável

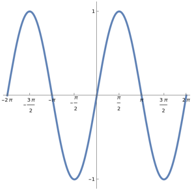
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], \ \sin'(x) = \cos(x).$$

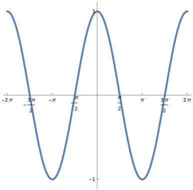
- Coseno é uma função diferenciável

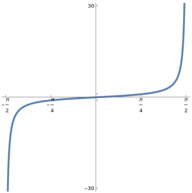
$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \ \cos'(x) = -\sin(x).$$

- Tangente é definida no intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \ \tan'(x) = 1/\cos^2(x).$$

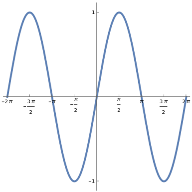


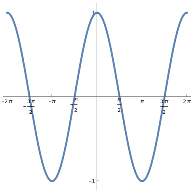


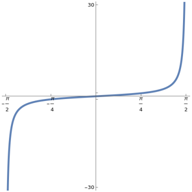


Funções trigonométricas inversas

- Se $x \in [-1, 1]$, por que ângulo θ temos que $\sin(\theta) = x$?
  $\theta = \arcsin(\mathbf{x})$
- Se $x \in [-1, 1]$, por que ângulo θ temos que $\cos(\theta) = x$?
  $\theta = \arccos(\mathbf{x})$
- Se $x \in \mathbb{R}$, por que ângulo θ temos que $\tan(\theta) = x$?
  $\theta = \arctan(\mathbf{x})$







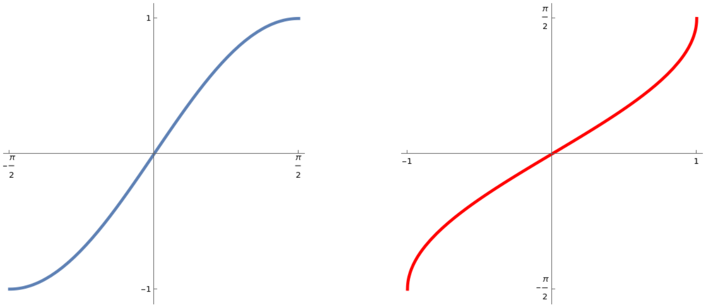
Função arcoseno

- No intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a função seno é invertível.
- A função inversa é chamada função arcoseno:

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

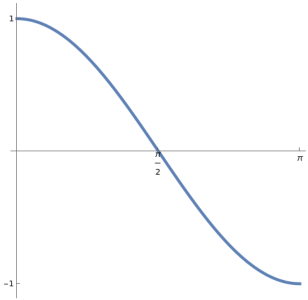
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$



Função arcocoseno

- No intervalo $[0, \pi]$ a função coseno é invertível.
- A função inversa é chamada função arcocoseno:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \pi]$$
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$



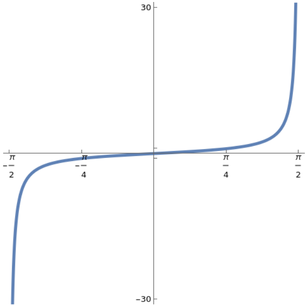
Função arcotangente

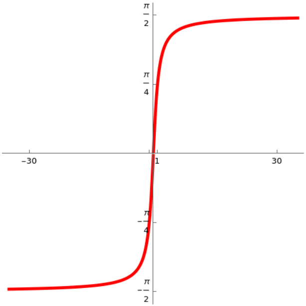
- A função tangente é invertível (derivada nunca é nula)
- A função inversa é chamada função arcotangente:

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \lim_{x \to \pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$





Exercício Individual

Regras

- Resolver o problema 4.1 do capítulo 1, alinhas a,b,c,d.
- De forma **individual**
- Resolver no caderno ou no pad
- Tempo à disposição: **10 minutos**
- Ao obter a solução ou para pedir ajuda levantar a mão

- Abra uma folha nova do caderno ou pad (a matemática precisa de muito espaço!).

Regra de Cauchy (De l'Hopital)

Seja I um intervalo aberto e a um extremo do intervalo Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \textbf{ existe}, \text{ e } g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I,$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

NOTA: A regra deve ser iterada quando

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \infty$$

$$\text{Neste caso, } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Think-Pair-Share

Regras

- Resolver o problema 1 a),b),c),e) do cap 1.
- Em pares (com a vizinha de lado)
- No caderno ou no pad
- Tempo à disposição:
  - **20 minutos** para resolver o exercício de forma **individual**, sem pedir ajuda à/ao colegas ou ao docente (5 minutos por exercício)
  - **10 minutos** para comparar a solução com a/o colega.
- Ao pedido do docente, partilhar a resposta com a turma

CRIAÇÃO DE PARES

- Junte-se com a/o colega de lado
- Ou junte-se a outra/o colega sem par (o docente ajuda)

Caderno e lapis / pad

- Abra uma folha nova do caderno ou pad (a matemática precisa de muito espaço!).

Regras de derivação

$$\frac{dx^n}{x} = nx^{n-1}$$
$$\frac{de^x}{x} = e^x$$
$$\frac{d\ln x}{x} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\frac{d\left(f(g(x))\right)}{dx} = f'(x)g'(f(x))$$

RESUMO - TAKE-HOME MESSAGES

Seja I um intervalo aberto e a um extremo do intervalo Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \textbf{ existe}, \text{ e } g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I,$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

NOTA: A regra deve ser iterada quando

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \infty$$

$$\text{Neste caso, } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$