

3 Funções de crescimento

A selecção de funções para a modelação do crescimento e produção de árvores e povoamentos, genericamente designadas por *funções de crescimento*, é uma fase essencial na elaboração de modelos de produção.

Podemos encontrar dois tipos de funções de crescimento, correspondentes a duas atitudes ou filosofias aparentemente contraditórias: as *funções de crescimento empíricas* (modelos empíricos) e as *funções de crescimento analíticas ou funcionais* (modelos funcionais ou de base biológica). Os modelos funcionais são derivados directamente a partir de proposições lógicas sobre as relações entre variáveis, enquanto que nos modelos empíricos se estabelece apenas a relação entre a variável dependente e variáveis independentes de acordo com um fórmula matemática - p.e. linear, parabólica - puramente artificial. Se um modelo matemático de crescimento for baseado em proposições lógicas sobre a biologia do crescimento, então as estimativas dos parâmetros obtidos com base nos dados podem ser interpretadas de acordo com a formulação do modelo, permitindo avançar no conhecimento das relações funcionais - causa/efeito - entre variáveis.

As funções a utilizar na modelação do crescimento biológico, quer sejam de natureza empírica ou deduzidas a partir de princípios biológicos, devem apresentar uma forma que esteja de acordo com os princípios do crescimento biológico:

- i) a curva é limitada pela produção zero no início ($t=0$ ou $t=t_0$, consoante a variável em questão toma valores maiores que 0 em $t=0$ ou mais tarde) e por uma produção máxima finita atingida em idade avançada (existência de assíntota);
- ii) a taxa relativa de crescimento (variação da variável x por unidade de tempo e de x) é constante na fase inicial, após a qual é decrescente; na maior parte dos casos, a fase decrescente inicia-se suficientemente cedo para podermos utilizar funções decrescentes na sua modelação;
- iii) o declive da curva aumenta com produções crescentes na fase inicial e decresce na fase final (tem um ponto de inflexão).

3.1 Funções de crescimento empíricas

Como funções de crescimento empíricas têm sido utilizadas diversas funções, geralmente sob forma integral. A tabela 3.1 caracteriza as funções que mais vulgarmente têm sido referidas em publicações sobre o assunto (Grosenbaugh, 1965; Prodan, 1968; Oliveira, 1984). Nenhuma destas funções obedece a todos os princípios de crescimento biológico; as restrições postas aos parâmetros correspondem às formas mais adequadas à modelação do crescimento.

As funções de Freese, Hossfeld e Korsun apresentam extremos (máximo ou mínimo de acordo com os sinais dos coeficientes), de modo que consideramos de interesse os casos em que ocorre um máximo para $t > 0$ (interessa neste caso o 1º ramo da curva) e aqueles em que ocorre um mínimo para $t < 0$.

3.2 Funções de crescimento de base biológica

As funções de crescimento de base biológica obtêm-se geralmente sob forma diferencial a partir do estabelecimento de uma hipótese sobre as taxas de crescimento absoluta ou relativa, obtendo-se a expressão para a produção por integração. Consegue-se deste modo atribuir significados precisos aos parâmetros destas funções.

Diversos autores (p.e. Turnbull, 1963; Grosenbaugh, 1965; Pienaar, 1965; Moser, 1967; Causton e Venus, 1981; Oliveira, 1984; Tomé, 1989) se têm debruçado sobre a análise das funções de crescimento analíticas e o significado dos respectivos parâmetros. Na tabela 3.2 apresentam-se sumariamente as principais características de algumas funções de crescimento com maior interesse para os modelos de produção. Nesta tabela o parâmetro A representa a assíntota superior da produção, o parâmetro k está relacionado com o declive da curva (taxa de crescimento) e o parâmetro c reflecte a dimensão inicial do organismo ou população; este último parâmetro c tem um limitado significado biológico, correspondendo à constante de integração na integração da forma diferencial da função de crescimento.

Tabela 3.1. Algumas funções empíricas utilizadas na modelação do crescimento florestal

Autor ou designação	Expressão matemática			Características		
	Forma integral (produção)	Forma diferencial (crescimento)	Restrições nos parâmetros	Valor na origem	Ponto de inflexão	Assíntota
Hipérbole	$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t}$	$\frac{dY}{dt} = -\beta_1 \frac{1}{t^2}$	$\beta_1 < 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y = \beta_0$
-	$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_2 t$	$\frac{dY}{dt} = \beta_2 - \beta_1 \frac{1}{t^2}$	$\beta_1 < 0; \beta_2 > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Semilogarítmica	$Y = \beta_0 + \beta_1 \log t$	$\frac{dY}{dt} = \beta_1 - \frac{1}{t}$	$\beta_1 > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Logarítmica 1	$Y = \beta_0 + \beta_1 t^{\beta_2}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{\beta_2}{t} (Y - \beta_0)$	$\beta_1, \beta_2 > 0; \beta_2 < 1$ $\beta_1, \beta_2 < 0$	$t = 0; Y = \beta_0$ $t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \beta_0$
Logarítmica 2	$Y = (\beta_0 + \beta_1 t)^{\beta_2}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{\beta_0 \beta_2 Y}{\beta_0 + \beta_1 t}$	$\beta_1, \beta_2 > 0; \beta_2 < 1$	$t = 0; Y = \beta_0^{\beta_2}$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Exponencial	$Y = \beta_0 + \beta_1 e^{\beta_2 t}$	$\frac{dY}{dt} = \beta_2 (\beta_0 - Y)$	$\beta_1, \beta_2 < 0$	$t = 0; Y = \beta_0 + \beta_1$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \beta_0$
Freese	$Y = \beta_0 t^{\beta_1} + \beta_2 t$ $\beta_0 > 0$	$\frac{dY}{dt} = Y \left(\log \beta_2 + \frac{\beta_1}{t} \right)$	$\beta_1 > 0; \log \beta_2 < 0$ $\beta_1 > 0; \log \beta_2 > 0$ $\beta_1 > 0; \log \beta_2 > 0$	$t = 0; Y = 0$ $t = 0; Y = 0$ $t = 0; Y = 0$	$t = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1}}{\log \beta_2}$ Não tem $t = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1}}{\log \beta_2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow -\infty$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Hossfeld	$Y = \frac{t^2}{\beta_0 + \beta_0 + \beta_2 t^2}$	$\frac{dY}{dt} = Y^2 \left(\frac{2\beta_0 + \beta_1 t}{t^3} \right)$	$\beta_0 > 0; \beta_1 < 0$ $\beta_0 > 0; \beta_1 > 0$	$t = 0; Y = 0$ $t = 0; Y = 0$	$\beta_1 \beta_2 t^3 + 3\beta_0 \beta_2 t^2 - \beta_0^2 = 0$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \frac{1}{\beta_2}$
Korsun (parábola logarítmica)	$Y = \beta_0 t^{\beta_1 + \beta_2 \log t}$ $\beta_0 > 0$	$\frac{dY}{dt} = \frac{Y}{t} (\beta_1 + 2\beta_2 \log t)$	$\beta_1 > 0; \beta_2 < 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow 0$	$z^2 - z + 2\beta_2 = 0$ $z = \beta_1 + 2\beta_2 \log t$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow 0$

Tabela 3.2. Funções de crescimento de base biológica

Autor ou designação	Expressão matemática			Características		
	Forma integral (produção)	Forma diferencial (crescimento)	Restrições nos parâmetros	Valor na origem	Ponto de inflexão	Assíntota
Schumacher	$Y = A e^{-\frac{k}{t}}$	$\frac{dY}{dt} = Y \frac{k}{t^2}$	$k > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow 0$	$t = \frac{k}{2}; Y = \frac{A}{e^2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Johnson-Schumacher	$Y = A e^{-\frac{k}{t+a}}$	$\frac{dY}{dt} = Y \frac{k}{(t+a)^2}$	$k > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow A e^{\frac{k}{a}}$	$t = \frac{k}{2} - a; Y = \frac{A}{e^2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Lundqvist-Korf	$Y = A e^{-\frac{k}{t^m}}$	$\frac{dY}{dt} = mY \frac{k}{t^{m+1}}$	$k > 0; n > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow 0$	$t = \left(\frac{mk}{m+1}\right)^{\frac{1}{m}}; Y = A e^{-\frac{m+1}{n}}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Monomolecular	$Y = A (1 - ce^{-kt})$	$\frac{dY}{dt} = k(A - Y)$	$k > 0$	$t = 0; Y = A(1 - c)$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Logística	$Y = \frac{A}{(1 + ce^{-kt})}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{k}{A} (AY - Y^2)$	$k > 0$	$t = 0; Y = \frac{A}{1+c}$ $t \rightarrow -\infty; Y \rightarrow 0$	$t = \frac{1}{k} \log c; Y = \frac{A}{2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Pearl-Reed	$Y = \frac{A}{1 + ce^{-(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)}}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{A} (AY - Y^2) f(t)$	$a_1, a_3 > 0$ $c > 0$	$t = 0; Y = \frac{A}{1+c}$ $t \rightarrow -\infty; Y \rightarrow 0$	inflecte para $Y = \frac{A}{x}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Gompertz	$Y = A e^{-ce^{-kt}}$	$\frac{dY}{dt} = k Y \ln \frac{A}{Y}$	$k > 0$ $c > 0$	$t = 0; Y = A e^{-c}$ $t \rightarrow -\infty; Y = 0$	$t = \frac{\log c}{k}; Y = \frac{A}{e}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Richards	$Y = A \left(1 - ce^{-kt}\right)^{\frac{1}{1-m}}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{kY}{1-m} \left[\left(\frac{A}{Y}\right)^{1-m} - 1\right]$	$k > 0$	$t = 0;$ $Y = A (1 - c)^{\frac{1}{1-m}}$	$t = \frac{\log\left(\frac{c}{1-m}\right)}{k}; Y = A m^{\frac{1}{1-m}}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
McDill-Amateis	$Y = \frac{A}{1 - (1 - A/Y_0) (t_0/t)^a}$	$\frac{dY}{dt} = a \frac{Y}{t} \left(1 - \frac{Y}{A}\right)$	$a > 0$ $A > Y_0 > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow 0$	$Y = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right)$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$

Vejamos em seguida as hipóteses em que cada uma das funções apresentadas se baseia.

3.2.1 Função de Schumacher e generalizações

No crescimento florestal, a função de Schumacher (1939) representa a primeira tentativa de definir uma função a partir de pressupostos lógicos. O modelo proposto por Schumacher para “uso generalizado”, baseia-se na hipótese de que a taxa relativa de crescimento cresce linearmente com o inverso do quadrado do tempo (ou seja, decresce de forma não linear com o tempo):

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = k \frac{1}{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{Y} dY = -k d \frac{1}{t}$$

Na forma integral obtém-se

$$y = A e^{-k \frac{1}{t}}$$

sendo o parâmetro $A = Y_0 e^{k/t_0}$ a assíntota, onde (t_0, Y_0) são os valores iniciais. O parâmetro k está inversamente relacionado com a taxa de crescimento, como se pode ver na figura 3.1.

A função de Johnson-Schumacher (Grosenbaugh, 1965) é uma generalização da função anterior que inclui os casos em que o valor inicial da produção Y_0 não é nulo. O parâmetro adicional a representa o facto de, para $t=t_0$, já ter sido atingida a dimensão $A e^{-k/a}$. Esta função não tem, portanto, grande aplicação na modelação do crescimento de árvores e povoamentos.

A função de Lundqvist (Stage, 1963) corresponde a outra generalização da função de Schumacher com as seguintes formas diferenciais:

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = k \frac{m}{t^{(m+1)}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{Y} dY = -k d \frac{1}{t^m}$$

A forma integral que lhe corresponde é:

$$Y = A e^{-k \frac{1}{t^m}}$$

A função de Korf (Oliveira, 1984) corresponde a uma reparametrização da função de Lundqvist:

$$m = n - 1$$

$$k = \frac{r}{m}$$

$$Y = A e^{\frac{r t^{1-n}}{1-n}}$$

A figura 3.1 ilustra o efeito que os diferentes parâmetros (assíntota, k e n) têm na forma da função de Lundqvist. Como se pode ver, para igual valor dos restantes parâmetros, o parâmetro k varia inversamente com a rapidez de crescimento, passando-se o inverso com o parâmetro n . Convém notar, contudo, que a influência dos 3 parâmetros se conjuga. Na figura 3.1-C pode ver-se, por exemplo, que é possível obter um crescimento mais rápido com um menor valor de n , desde que este esteja combinado com um maior valor de assíntota. A localização do ponto de inflexão da curva é independente do valor da assíntota, mas depende dos valores combinados de k e n , sendo crescente com k . O efeito de n é variável e depende grandemente do valor de k . A figura 3.2 exemplifica o efeito combinado dos dois parâmetros de forma na idade a que ocorre o ponto de inflexão. O valor da curva de crescimento quando ocorre o ponto de inflexão não depende, contudo, do valor do parâmetro k , mas sim dos valores da assíntota e do parâmetro n (figura 3.3), ocorrendo para maiores valores da variável Y quanto maior é o valor de n e quanto maior é a assíntota.

3.2.2 Função monomolecular

Admite-se que a taxa absoluta de crescimento é proporcional à diferença entre a dimensão máxima (assíntota) e a dimensão actual:

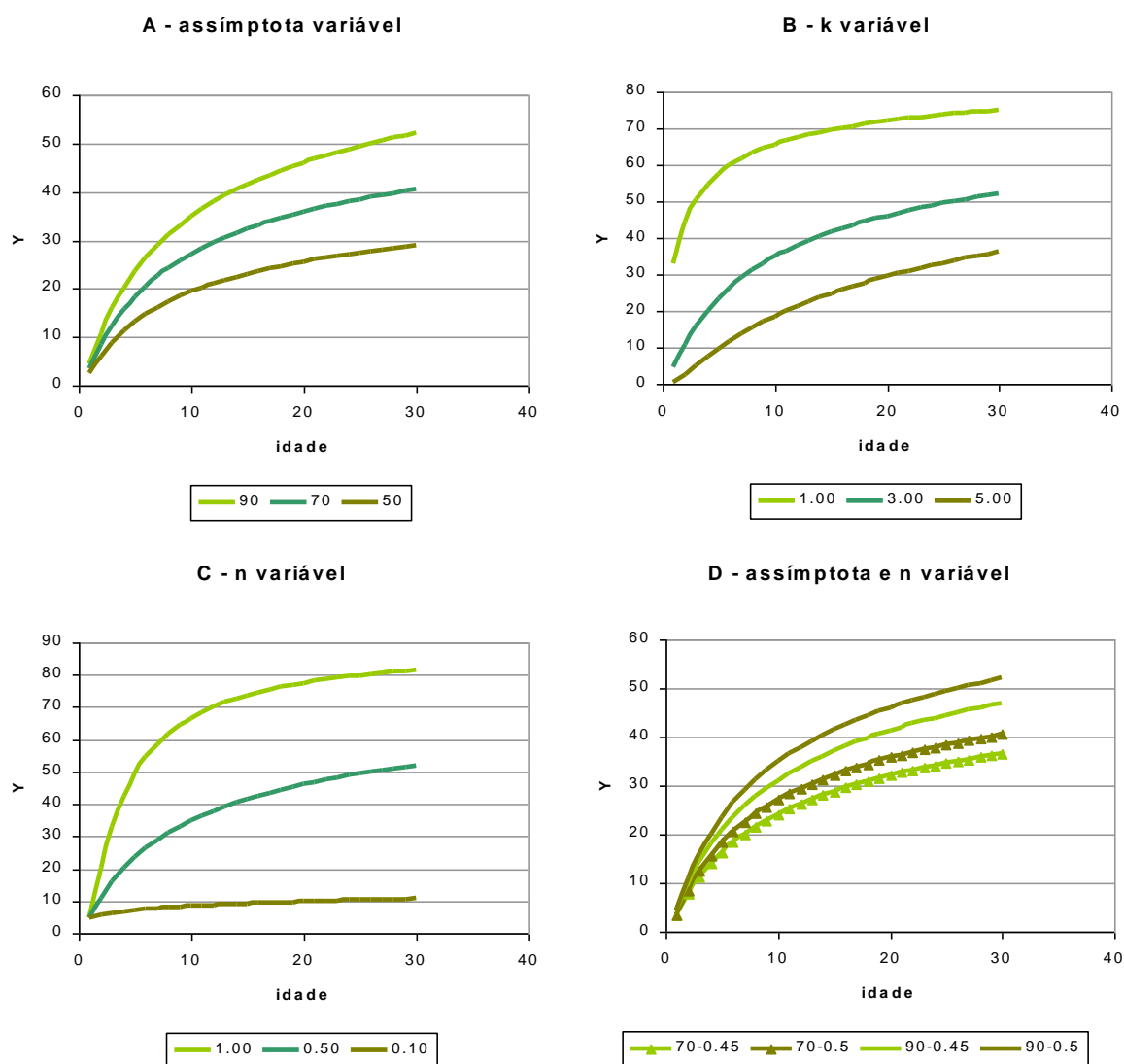


Figura 3.1 Efeito dos diversos parâmetros da função de Lundqvist-Korf na forma das curvas de crescimento.

$$\frac{dY}{dt} = k(A - Y)$$

Na forma integral vem

$$Y = A \left(1 - c e^{-k t} \right), \text{ com } c = e^{k t_0} \left(1 - \frac{Y_0}{A} \right)$$

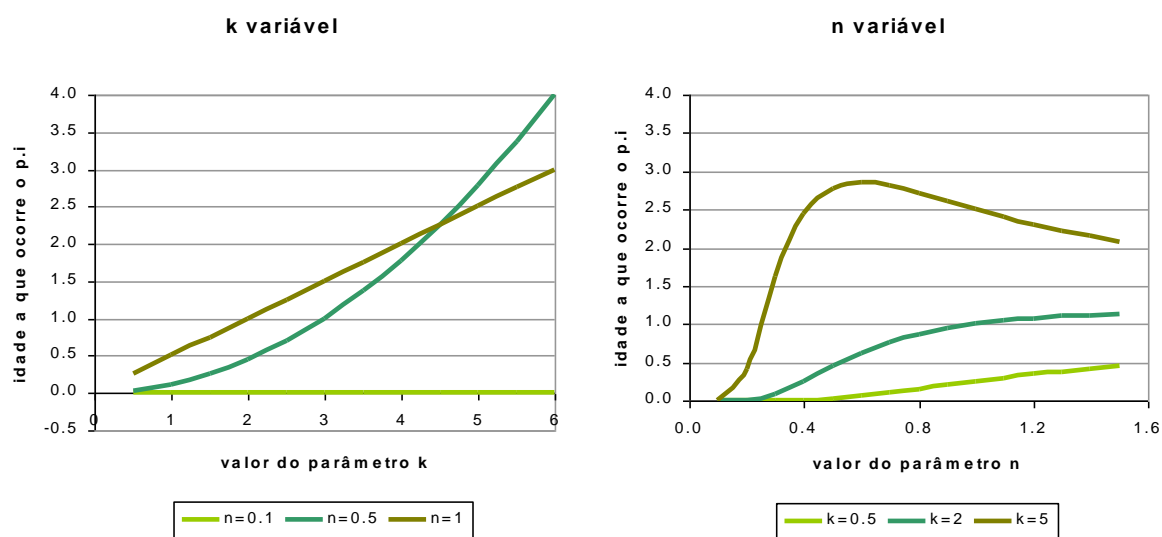


Figura 3.2 Efeito dos parâmetros k e n da função de Lundqvist-Korf na localização do ponto de inflexão.

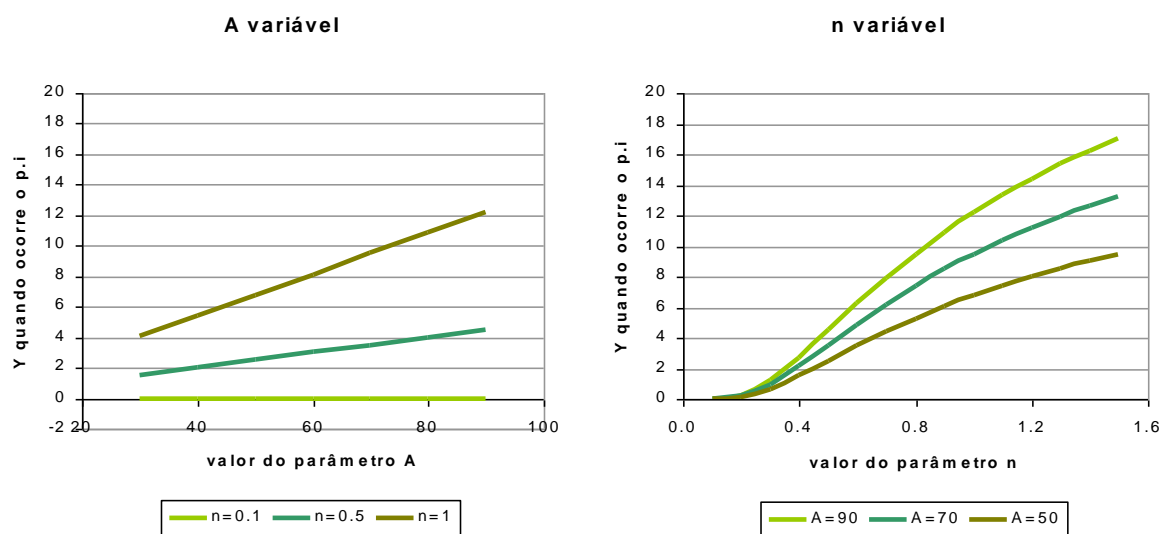


Figura 3.3 Efeito dos parâmetros A e n da função de Lundqvist-Korf no valor da variável quando ocorre o ponto de inflexão.

3.2.3 Funções logística e logística generalizada

A função logística baseia-se na hipótese de que a taxa relativa de crescimento é a resultante do potencial biótico k reduzido de acordo com o tamanho da população ou do organismo nY (resistência ambiental):

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = (k - nY)$$

A taxa relativa de crescimento é, portanto, uma função linear decrescente com a dimensão.

Na forma integral vem

$$Y = \frac{A}{\left(1 + c e^{-k t}\right)}$$

com $A = \frac{k}{n}$ e $c = e^{k t \frac{1}{2}}$

3.2.4 Função de Gompertz

Esta função, limite da função de Richards quando $m \rightarrow 1$, pode deduzir-se directamente a partir da seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = k (\log A - \log Y) = -k \log \left(\frac{Y}{A} \right)$$

Esta equação admite uma taxa relativa de crescimento inversamente proporcional ao logaritmo da proporção da dimensão em relação ao valor assintótico.

Na forma integral

$$Y = A e^{-c e^{-k t}}, \text{ com } c = (\log A - \log Y_0) e^{k t_0}$$

3.2.5 Função de Richards

Richards (1959) deduziu a sua função por generalização da função desenvolvida por Von Bertalanffy para o crescimento animal (Pienaar e Turnbull, 1973). Esta função modela a taxa absoluta de crescimento em biomassa (ou volume) como a diferença entre uma *taxa anabólica* (metabolismo construtivo), proporcional à área fotossinteticamente activa (expressa através de uma relação alométrica com a biomassa) e uma *taxa catabólica* (metabolismo destrutivo), proporcional à biomassa. Assim, teremos:

taxa anabólica	$c_1 S = c_1 (c_0 Y^m) = c_2 Y^m$
taxa catabólica	$c_3 Y$
taxa potencial de crescimento	$c_2 Y^m - c_3 Y$
taxa de crescimento	$c_4 (c_2 Y^m - c_3 Y),$

onde S é a área fotossinteticamente activa; Y é a biomassa (ou volume); m é a constante alométrica da relação entre S e Y ; c_0, c_1, c_2, c_3 são coeficientes de proporcionalidade; e c_4 é um coeficiente de eficácia.

Obtém-se assim a seguinte forma diferencial para a função de Richards:

$$\frac{dY}{dt} = \eta Y^m - \gamma Y$$

Por integração e utilizando a condição inicial $y(t_0)=0$, obtém-se a forma integral da função de Richards:

$$Y = A \left(1 - c e^{-k t} \right)^{\frac{1}{1-m}},$$

de parâmetros m, c, k e A em que:

$$c = e^{-(1-m)\gamma t_0} = e^{-k t_0}$$

$$k = (1-m)\gamma$$

$$A = \left(\frac{\eta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-m}} \text{ (assíptota).}$$

Na versão original de Von Bertalanffy o expoente m era fixo e igual a $2/3$. Convém salientar que as funções monomolecular, logística e Gompertz são também casos particulares da função de Richards com valores do parâmetro m respectivamente iguais a 0, 2, $\rightarrow 1$.

As figuras 3.4 ilustram o efeito dos três parâmetros da função de Richards na forma da curva de crescimento, enquanto que as figuras 3.5 e 3.6 se referem, respectivamente, ao seu efeito na localização do ponto de inflexão e no valor da variável quando o ponto de inflexão ocorre.

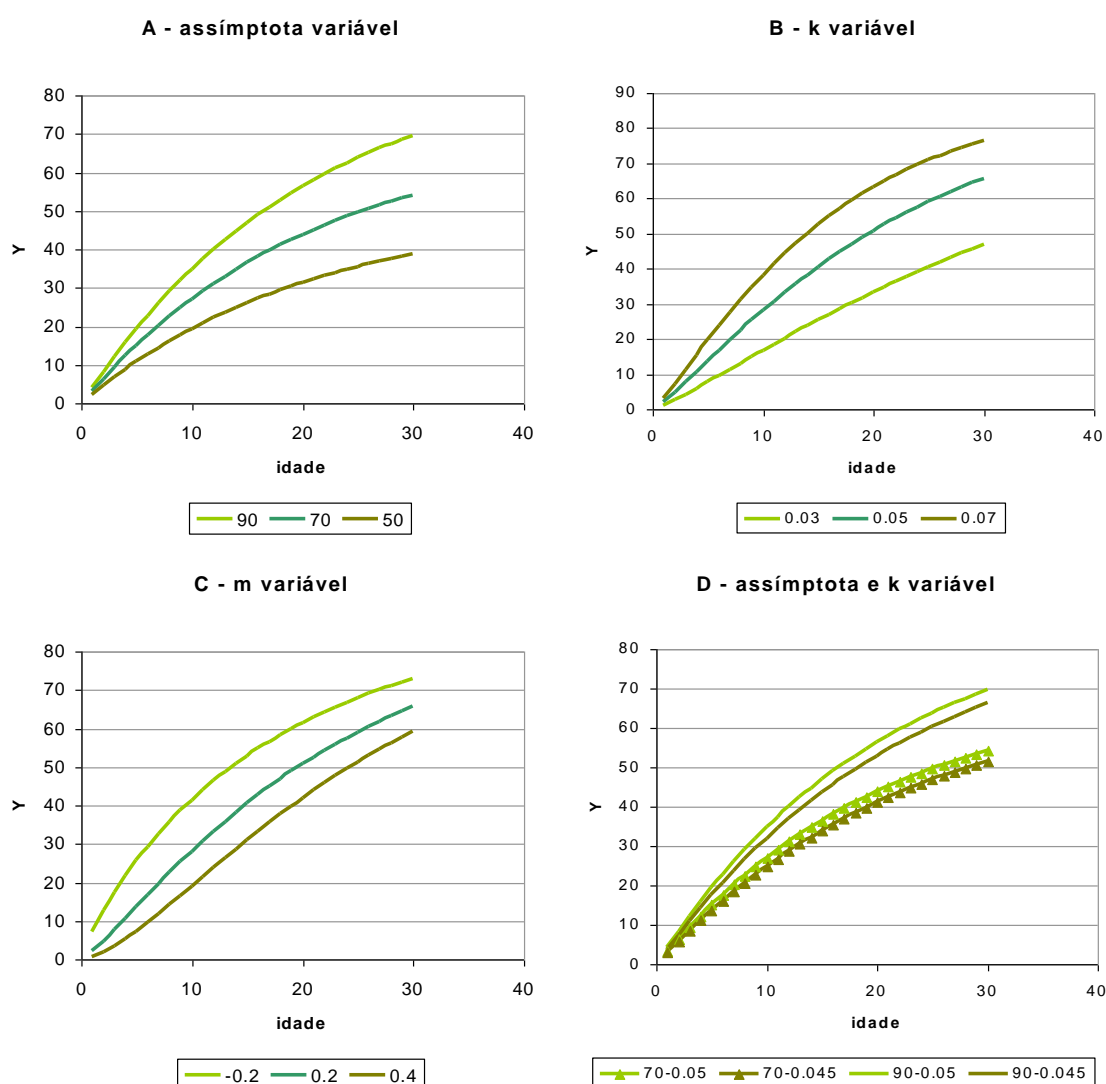


Figura 3.4 Efeito dos diversos parâmetros da função de Richards na forma das curvas de crescimento.

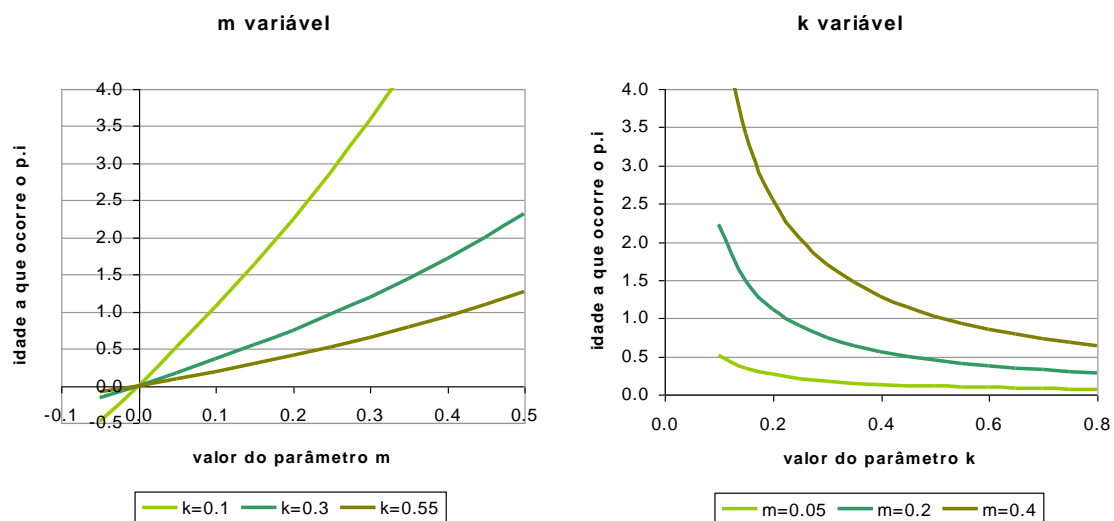


Figura 3.5 Efeito dos parâmetros k e m da função de Richards na localização do ponto de inflexão.

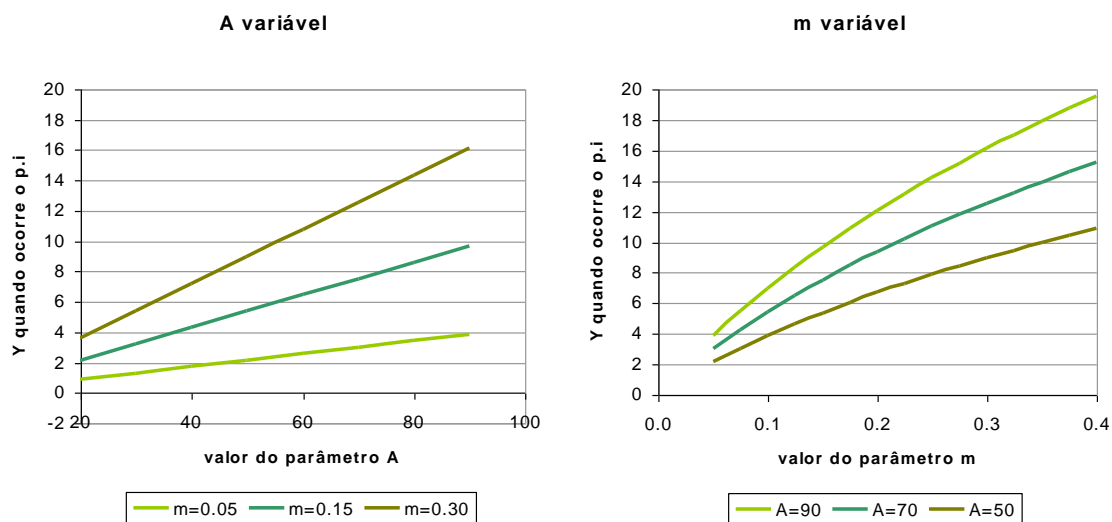


Figura 3.6 Efeito dos parâmetros A e m da função de Richards no valor da variável quando ocorre o ponto de inflexão.

Como se pode ver na figura 3.4, valores de k superiores correspondem a taxas de crescimento superiores, enquanto que, pelo contrário, a menores valores de m correspondem taxas de crescimento superiores. Como seria óbvio, a assíntota está também positivamente relacionada com maiores produções. A combinação do efeito dos diferentes parâmetros pode, contudo, “mascarar” o efeito de cada parâmetro individualmente, como se pode ver na figura 3.4 D.

Causton e Venus (1981) apresentam um estudo bastante detalhado sobre a aplicação da função de Richards na modelação do crescimento de plantas.

A figura 3.5 mostra que o ponto de inflexão ocorre tanto mais cedo quanto maior é o valor de k e menor o valor de m . Ao mesmo tempo, o valor da variável quando ocorre o ponto de inflexão é tanto mais elevado quanto maior é o valor da assíntota, embora esteja inversamente relacionado com o valor de m .

3.2.6 Função de McDill-Amateis

A função de McDill-Amateis foi desenvolvida por estes autores em 1992 de modo a garantir a compatibilidade das dimensões e também as propriedades biológicas das curvas de crescimento. As variáveis consideradas para a função de crescimento e as correspondentes dimensões foram:

Variável	dY/dt	t	Y	A
Dimensão	LT^{-1}	T	L	L

onde L indica um comprimento e T um tempo e A é a assíntota da variável Y.

Aplicando a teoria da análise dimensional a estas variáveis (McDill e Amateis, 1992) e garantindo, ao mesmo tempo, que a taxa de crescimento em altura tende para 0 quando Y tende para a assíntota A, obtém-se a seguinte função de crescimento:

$$\frac{dY}{dt} = k \frac{Y}{t} \left(1 - \frac{Y}{A} \right)$$

Nesta equação, k é um parâmetro relacionado com a velocidade do crescimento. É uma função de crescimento semelhante à função de Richards, mas tem menos parâmetros e, portanto, o que pode ser uma vantagem no ajustamento aos dados.

A solução da equação diferencial correspondente à função de crescimento origina a seguinte função de produção:

$$Y = \frac{A}{1 - \left(1 - \frac{A}{Y_0}\right) \left(\frac{t_0}{t}\right)^k}$$

onde (t_0, Y_0) é a condição inicial. Em modelos de crescimento de árvores devem verificar-se as condições:

$$A > Y_0 > 0 \quad \text{e} \quad k > 0$$

É fácil verificar que, nestas condições, a altura tende para zero quando a idade tende para zero e que A é a assíntota da função. Além disso, a função apresenta um ponto de inflexão que ocorre quando:

$$Y = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

Assim, a curva tem um único ponto de inflexão que ocorre para um valor positivo de Y quando a é superior a 1. Quando a é menor ou igual a 1, a curva é côncava no 1º quadrante.

3.3 Famílias de curvas de crescimento

Em todas as funções de crescimento apresentadas considerou-se a dimensão do indivíduo ou população função apenas do tempo, o que limita a sua aplicabilidade aos modelos de produção. De facto, uma função de crescimento ajusta-se geralmente bem ao conjunto de dados de uma mesma parcela permanente. Por exemplo, a figura 3.7 representa o ajustamento da função de Lundqvist aos dados da evolução da área basal e da altura dominante de uma parcela permanente de eucalipto na zona centro litoral.

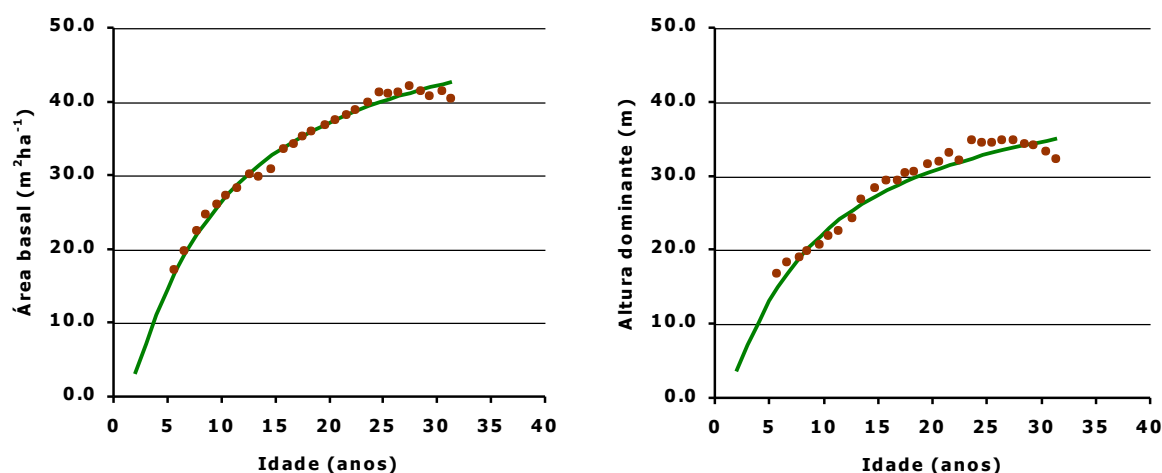


Figura 3.7 Ajustamento da função de Lundqvist aos dados da evolução em área basal e altura dominante de uma parcela permanente de eucalipto na zona centro litoral.

No desenvolvimento de um modelo de produção, contudo, o objectivo é modelar, não os dados de uma parcela, mas um conjunto de dados de várias parcelas permanentes, tal como se procura exemplificar na figura 3.8 que representa os gráficos da evolução em área basal e altura dominante de um conjunto de parcelas permanentes da zona centro de Portugal.

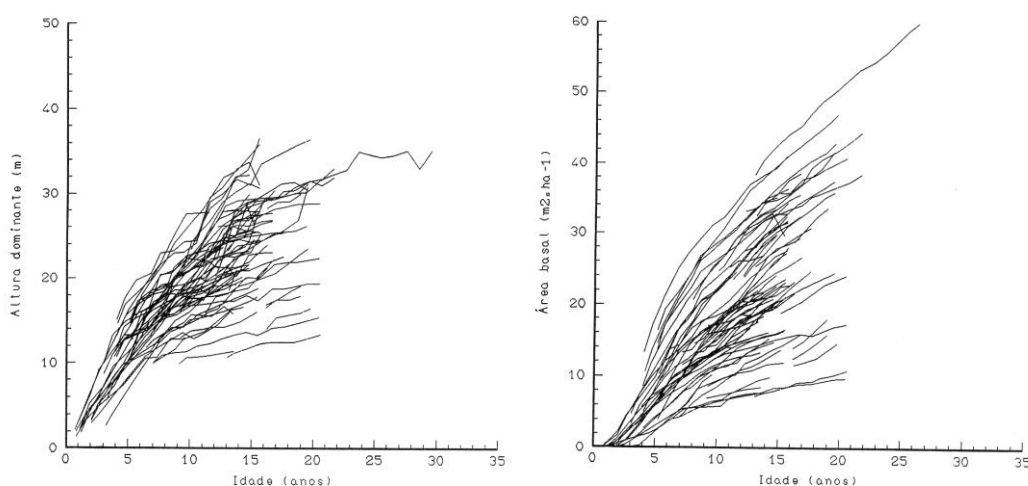


Figura 3.8 Dados da evolução em área basal e altura dominante de um conjunto de parcelas permanentes de eucalipto na zona centro.

Em modelação utilizam-se dois métodos para modelar, simultaneamente, o crescimento de um conjunto de parcelas permanentes:

- expressão dos parâmetros das funções de crescimento como função de variáveis do povoamento
- utilização de funções de crescimento formuladas como equações às diferenças

3.3.1 Expressão dos parâmetros das funções de crescimento como função de variáveis do povoamento

Alguns autores têm tentado ultrapassar o problema da modelação conjunta de dados provenientes de diversos povoamentos expressando os coeficientes das funções de crescimento em função de variáveis do povoamento.

Este processo foi sugerido por Schumacher para a introdução da influência de outras variáveis no seu modelo, como sejam a classe de qualidade e a densidade. Para a forma logarítmica da função de Schumacher

$$\ln Y = a - k \frac{1}{t}, \quad \text{com} \quad a = \ln A$$

Podemos considerar, por exemplo, o parâmetro a como função linear da classe de qualidade, obtendo:

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 CQ - k \frac{1}{t}.$$

Outro exemplo típico deste modo de proceder são as curvas de classe de qualidade obtidas pelo método da regressão linear múltipla com estimação “a priori” da classe de qualidade (ver capítulo 5).

Os modelos GLOBUS, EUSOP (Tomé *et al.*, 1995) e GLOBULUS (Tomé *et al.*, 2000, 2001) são baseados num conjunto de funções de crescimento, algumas das quais formuladas como equações às diferenças, sendo os parâmetros de todas elas expressos em funções de alguma(s) variável(s) do povoamento: índice de qualidade da estação, densidade do

povoamento, idade, rotação, etc. Como exemplo, considere-se a função de inicialização da área basal do modelo GLOBULUS:

$$G = Ag \cdot e^{-(kg_1 + kg_2) \left(\frac{1}{t}\right)^{mg}}$$

$$kg_1 = kg_0 + (kgQ + kgQr \cdot rot) \frac{1}{lqe} + kgr \cdot rot$$

$$kg_2 = (kgn + kgnr \cdot rot) \frac{1}{\sqrt{Npl}}$$

$$Ag = AgQ \cdot lqe$$

$$mg_1 = mg_0 + mgQ \cdot \log(lqe) + (mgr + mQr \cdot \log(lqe)) \cdot rot$$

$$mg_2 = mgn + mgnr \cdot rot$$

onde: G_i é a área basal no instante t_i ; N_i é a densidade no instante t_i ; Npl é a densidade à plantação; lqe é o índice de qualidade da estação, rot é a variável indicatriz de talhadia (=0 no alto-fuste e =1 nas talhadas); AgQ , ng_0 , ngQ , ngr , ngn , $ngnr$, kg_0 , kgQ , $kgQr$, kgr ; kgn e $kgnr$ são parâmetros.

Um modo bastante usual para incorporar nas funções de crescimento outras variáveis além do tempo tem sido o recurso à regressão múltipla (Hunt, 1982) passando-se portanto a utilizar modelos empíricos. Um exemplo típico são algumas equações para o acréscimo em diâmetro da árvore individual (Harrison *et al.*, 1986); Walsh, 1986).

3.3.2 Formulação de funções de crescimento como equações às diferenças

Um outro método para resolver a modelação conjunta do crescimento de vários povoamentos é recorrer a funções de crescimento formuladas como equações às diferenças. A expressão de uma função de crescimento como uma equação às diferenças baseia-se na premissa de que é possível modelar o crescimento com base numa família de curvas correspondente às curvas originadas por essa função de crescimento com todos os parâmetros comuns excepto um, o chamado parâmetro livre. Exemplificando com a função de Lundqvist, temos a seguinte expressão para a função de crescimento:

$$y = Ae^{-kt^m}$$

A partir da função de crescimento nos instantes t_1 e t_2 obtém-se, respectivamente:

$$y_1 = A e^{-k t_1^m} \Rightarrow A = \frac{y_1}{e^{-k t_1^m}}$$

$$y_2 = A e^{-k t_2^m} \Rightarrow A = \frac{y_2}{e^{-k t_2^m}}$$

Igualando agora as duas expressões obtidas para A, vem:

$$\frac{y_1}{e^{-k t_1^m}} = \frac{y_2}{e^{-k t_2^m}} \Rightarrow y_2 = y_1 e^{-k (t_2^m - t_1^m)},$$

expressão que corresponde à equação de Lundqvist com a assíntota A como parâmetro livre, geralmente designada por Lundqvist-A. A família de curvas é definida, para esta equação às diferenças, pelos parâmetros k e n. Uma medição realizada numa parcela, ou seja, um par (t_0, y_0) , permite calcular a assíntota de acordo com

$$A = \frac{y_0}{e^{-k t_0^m}}$$

Uma medição é portanto a condição inicial, a qual expressa a forma de uma função da família de curvas definida pela equação às diferenças. Do mesmo modo se podem obter, para cada função de crescimento, tantas formulações como equações às diferenças quantos os parâmetros dessa função de crescimento.

As figuras 3.1 representam famílias de curvas correspondentes à função de Lundqvist-Korf formulada como equações às diferenças:

- com a assíntota livre (3.1-A)
- com o parâmetro k livre (3.1-B)
- com o parâmetro n livre (3.1-C)

Por seu lado, as figuras 3.4 representam famílias de curvas correspondentes à função de Richards formulada como equações às diferenças:

- com a assíntota livre (3.4-A)

- com o parâmetro k livre (3.4-B)
- com o parâmetro m livre (3.4-C)

A função de McDill-Amateis está automaticamente escrita como uma equação às diferenças, bastando considerar (t_1, Y_1) como condição inicial.

As tabelas 3.3 e 3.4 mostram as diversas funções de crescimento – empíricas e de base biológica – nas suas diferentes formulações como equações às diferenças.

Note-se que os parâmetros das funções de crescimento podem ser expressos em função de variáveis da estação ou do povoamento, tal como já referido para as correspondentes funções escritas na sua forma integral. Um exemplo é a função de projecção em área basal do modelo GLOBULUS:

$$G_2 = Ag \left(\frac{G_1}{Ag} \right)^{\frac{t_1^{ng_1+ng_2} \frac{N_1}{1000}}{t_2^{ng_1+ng_2} \frac{N_2}{1000}}} \quad Ag = AgQ \cdot lqe$$

$$ng_1 = ng_0 + ngQ \cdot \log(lqe) + (ngr + nQr \cdot \log(lqe)) \cdot rot$$

$$ng_2 = ngn + ngnr \cdot rot$$

onde: G_i é a área basal no instante t_i ; N_i é a densidade no instante t_i ; lqe é o índice de qualidade da estação, rot é a variável indicatriz de talhadia (=0 no alto-fuste e =1 nas talhadias); AgQ , ng_0 , ngQ , ngr , ngn e $ngnr$ são parâmetros.

3.3.3 Formulação de funções de crescimento como equações às diferenças independentes da idade

Há casos em que a variável idade é de difícil determinação (por exemplo quando a espécie não forma anéis de crescimento anuais bem distintos, outros mesmo em que esta variável não faz sentido (povoamentos irregulares). Nestes casos o crescimento das árvores e povoamentos continua a seguir a forma de uma função de crescimento, no entanto não é possível utilizar as expressões matemáticas que temos vindo a apresentar. Tomé et al. (2006) mostraram que é possível obter formulações das funções de crescimento nas quais a idade não está explícita, utilizando uma metodologia semelhante à utilizada para deduzir

as formulações às diferenças. Utilizando, como exemplo, a função de Lundqvist, comecemos por resolver a função, calculada na idade t_i , em ordem a esta idade:

$$Y_i = A e^{-k \frac{1}{t_i^m}} \Rightarrow t_i = \left[\frac{-k}{\ln(Y_i/A)} \right]^{\frac{1}{m}}$$

A expressão para t_i pode ser substituída na função de crescimento, calculada no ponto t_i+a , onde a é o intervalo de projecção:

$$Y_{i+a} = A e^{-k \frac{1}{(t_i+a)^m}} \Rightarrow Y_{i+a} = A e^{-k \frac{1}{\left(\left[\frac{-k}{\ln(Y_i/A)} \right]^{\frac{1}{m}} + a \right)^m}}$$

É esta a formulação da função de Lundqvist como uma equação às diferenças independente da idade (Lundqvist-t). A expressão parece complexa mas, talvez devido ao seu significado biológico, é muito fácil obter convergência quando ajusta a dados reais. Note-se que a função não é realmente independente da idade, apenas a idade não está explícita na expressão.

Utilizando um procedimento semelhante, pode obter-se a formulação da função de Richards como equação às diferenças independente da idade (Richards-t):

$$Y_{i+a} = A \left(1 - e^{-k a \left(1 - \left(\frac{Y_i}{A} \right)^{1-m} \right)} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Para obter uma família de curvas com este tipo de equações, pelo menos um dos parâmetros tem que ser expresso em função de características da estação (solo e/ou clima ou índice de qualidade da estação), podendo ainda incluir características do povoamento. É importante salientar que as equações às diferenças independentes da idade são invariantes para o intervalo de projecção se e só se as expressões dos parâmetros não contiverem variáveis que dependam da idade dos povoamentos. Caso esta condição não se verifique, as projecções dependerão, obviamente, do intervalo de projecção. Esta condição também se verifica com as equações às diferenças que vimos no ponto anterior.

Note-se que o recurso a formulações de funções de crescimento como equações às diferenças independentes da idade fornece uma metodologia para estimar o índice de qualidade da estação desde que estejam disponível duas medições de uma mesma parcela. Suponhamos, como exemplo, que se verificou que o parâmetro k da função Richards-t está fortemente relacionado com o índice de qualidade da estação. Com duas medidas, às idades t_i (Y_i) e t_{i+a} (Y_{i+a}), é possível determinar o valor de k :

$$[11] \quad k = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1 - \left(\frac{Y_i}{A} \right)^{(1-m)}}{1 - \left(\frac{Y_{i+a}}{A} \right)^{(1-m)}} \right)$$

O próprio parâmetro k pode ser utilizado como índice de qualidade da estação ou, alternativamente, pode ser expresso com uma função do índice de qualidade da estação (S). Se esta função for linear ($k=a+b S$), então o S pode ser facilmente obtido, uma vez determinado o valor de k .

3.4 Exercícios

3.4.1 Ajustamento da função de Lundqvist-Korf aos dados de uma parcela permanente

Utilize o EXCEL para ajustar a função de Lundqvist-Korf aos dados que se encontram no ficheiro Dados 3.3.1.xls. Comece por fazer um ajustamento “tentativas” e depois recorra ao SOLVER.

3.4.2 Análise da forma da função de Lundqvist-Korf para diferentes valores dos parâmetros

Utilize o EXCEL para fazer os gráficos da função de Lundqvist-Korf para:

- a) Iguais valores dos parâmetros k e n , assíntota variável

Sugestão: $A=40,70,100$; $k=3$; $n=0.5$

Tabela 3.3. Funções de crescimento empíricas escritas sob a forma de equações às diferenças. As diferentes formas de uma mesma função estão indexadas pelo parâmetro livre.

Função	Expressão matemática
Freese- β_0	$Y_2 = Y_1 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{\beta_1} \beta_2^{\left(\frac{t_2}{t_1} \right)}$
Freese- β_1	$Y_2 = Y_1^{\frac{\log(t_2)}{\log(t_1)}} \beta_0^{\left(1 - \frac{\log(t_2)}{\log(t_1)} \right)} \beta_2^{\left(t_2 - t_1 \frac{\log(t_2)}{\log(t_1)} \right)}$
Freese- β_2	$Y_2 = Y_1^{\frac{t_2}{t_1}} \beta_0^{\left(1 - \frac{t_2}{t_1} \right)} t_2^{\beta_1} t_1^{-\beta_1 \frac{t_2}{t_1}}$
Hossfeld- β_0	$Y_2 = Y_1 \frac{t_2^2}{t_1^2 + Y_1 \left(\beta_1(t_2 - t_1) + \beta_2(t_2^2 - t_1^2) \right)}$
Hossfeld- β_1	$Y_2 = Y_1 \frac{t_2}{t_1 + Y_1 \left(\beta_0 \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) + \beta_2(t_2 - t_1) \right)}$
Hossfeld- β_2	$Y_2 = Y_1 \frac{1}{1 + Y_1 \left(\beta_0 \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} \right) + \beta_1 \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) \right)}$
Korsun- β_0	$Y_2 = Y_1 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{\beta_1} \frac{t_2^{\beta_2 \log(t_2)}}{t_1^{\beta_1 \log(t_1)}}$
Korsun- β_1	$Y_2 = Y_1^{\frac{\log(t_2)}{\log(t_1)}} \beta_0^{\left(1 - \frac{\log(t_2)}{\log(t_1)} \right)} t_2^{\beta_2 \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}$
Korsun- β_2	$Y_2 = Y_1^{\left(\frac{\log(t_2)}{\log(t_1)} \right)^2} \beta_0^{\left(1 - \left(\frac{\log(t_2)}{\log(t_1)} \right)^2 \right)} t_2^{\beta_1 \left(1 - \frac{\log(t_2)}{\log(t_1)} \right)}$

Tabela 3.4. Funções de crescimento de base biológica escritas sob a forma de equações às diferenças. As diferentes formas de uma mesma função estão indexadas pelo parâmetro livre.

Função	Expressão matemática
Lundqvist-A (Schumacher-A para n=1)	$Y_2 = Y_1 e^{k \left(\frac{1}{t_1^m} - \frac{1}{t_2^m} \right)}$
Lundqvist-k (Schumacher-k para n=1)	$Y_2 = A \left(\frac{Y_1}{A} \right)^{\left(\frac{t_1}{t_2} \right)^m}$
Richards-A (Monomolecular-A para m=0)	$Y_2 = Y_1 \left(\frac{1 - e^{-k t_2}}{1 - e^{-k t_1}} \right)^{\frac{1}{1-m}}$
Richards-k (Monomolecular-k para m=0)	$Y_2 = A \left(1 - \left(1 - \left(\frac{Y_1}{A} \right)^{1-m} \right)^{\frac{t_2}{t_1}} \right)^{\frac{1}{1-m}}$
Richards-m	$Y_2 = A^{\left(\frac{1 - \frac{\log(1 - e^{-k t_2})}{\log(1 - e^{-k t_1})}}{1 - \frac{\log(1 - e^{-k t_2})}{\log(1 - e^{-k t_1})}} \right)} Y_1^{\frac{\log(1 - e^{-k t_2})}{\log(1 - e^{-k t_1})}}$
McDill-Amateis	$Y_2 = \frac{A}{1 - \left(1 - \frac{A}{Y_1} \right) \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^k}$

a) Iguais valores de assíntota e parâmetro n, k variável

Sugestão: A=70; k=1,3,5; n=0.5

b) Iguais valores de assíntota e parâmetro k, n variável

Sugestão: A=70; k=3; n=0.1,0.5,0.9

c) Com base nos dados da altura dominante da parcela permanente do exercício 2.5.2 designada “3x3 lqe=26” tente encontrar valores para A, k e n que levem a uma curva com um comportamento semelhante ao da parcela em questão. Estabeleça um

“paralelo” entre aquilo que fez e o ajustamento da função de Lundqvist aos dados da parcela com base em teoria da regressão.

3.4.3 Análise da forma da função de Richards para diferentes valores dos parâmetros

Utilize o EXCEL para fazer os gráficos da função de Richards para:

- a) Iguais valores dos parâmetros k e m , assíntota variável
Sugestão: $A=40,70,100$; $k=0.05$; $m=0.2$
- b) Iguais valores de assíntota e parâmetro m , k variável
Sugestão: $A=70$; $k=0.03,0.05,0.07$; $m=0.2$
- c) Iguais valores de assíntota e parâmetro k , m variável
Sugestão: $A=70$; $k=0.05$; $m=-0.2,0.2,0.4$

3.4.4 Análise da forma da função de McDill-Amateis para diferentes valores dos parâmetros

Utilize o EXCEL para fazer os gráficos da função de McDill-Amateis para:

- a) Iguais valores do parâmetro k , assíntota variável
Sugestão: $A=40,70,100$; $k=0.5$
- b) Iguais valores de assíntota, a variável
Sugestão: $A=70$; $k=0.3,0.5,0.7$

Note que para resolver as alíneas a) e b) precisa de inicializar a função com um valor de Y para um t préfixado. Utilize $Y=5$ para $t=1$. Consegue justificar porque é que a função de McDill-Amateis necessita de ser inicializada?

3.4.5 Dedução das expressões da função de crescimento de Lundqvist-Korf como equação às diferenças

- a) Deduza as três formulações da função de Lundqvist-Korf como equação às diferenças

- b) Deduza ainda a formulação da função de Lundqvist-Korf como equação às diferenças independente da idade

3.4.6 Dedução das expressões da função de crescimento de Richards como equação às diferenças

- a) Deduza as três formulações da função de Richards como equação às diferenças
- b) Deduza ainda a formulação da função de Richards como equação às diferenças independente da idade