

Modelos Matemáticos e Aplicações

Modelos Lineares Generalizados

Jorge Cadima

Matemática (DCEB), Instituto Superior de Agronomia (ULisboa)

2024-25

Bibliografia

- Agresti, A. (2015) *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*, Wiley.
- Dobson, A.J. & Barnett, A.G. (2008) *An Introduction to Generalized Linear Models*, 3rd ed., CRC Press.
- Hardin, J.W. & Hilbe, J.M. (2018) *Generalized Linear Models and Extensions*, 4a. ed., Stata Press Publications.
- McCullagh, P. & Nelder, J. (1989) *Generalized Linear Models*, Chapman & Hall.
- McCulloch, C. & Searle, S. (2001) *Generalized, Linear, and Mixed Models*, John Wiley & Sons. **Mat 600-62.**
- Agresti, A. (1990) *Categorical Data Analysis*, John Wiley & Sons. **Mat 401-62.**
- Hosmer, D.W. & Lemeshow, S. (1989) *Applied Logistic Regression*, John Wiley & Sons. **Mat 258-62.**

GLMs no :

- Faraway, J.J. (2006) *Extending the Linear Model with R: Generalized Linear, Mixed Effects and Nonparametric Regression Models*, Chapman & Hall/CRC.
- Fox, J. & Weisberg, S. (2011) *An R Companion to Applied Regression*, 2d Ed, Sage Publications (R package: [car](#)).
- Venables & Ripley (2002). *Modern Applied Statistics with S* (4a. edição), Springer. (R package: [MASS](#)).

Modelos Lineares Generalizados

Modelos Lineares Generalizados (MLGs)

(Generalized Linear Models, GLMs):

- são uma família muito vasta de modelos;
- são extensão do Modelo Linear;
- englobam muitos modelos previamente conhecidos e usados, alguns casos há largas décadas, entre eles:
 - ▶ modelo *probit*
 - ▶ modelo *logit* (ou Regressão Logística)
 - ▶ modelos log-lineares
 - ▶ o próprio modelo linear.
- o “chapéu de chuva comum” dos MLGs foi introduzido e formalizado por McCullagh e Nelder (1989);

Exemplo motivador: variável resposta dicotómica

Exemplo Hosmer & Lemeshow

Hosmer e Lemeshow, em *Applied Logistic Regression* (Wiley, 1989) têm dados sobre $n = 100$ pacientes, com variáveis:

- idade – numérica;
- doença arterial coronária (DAC) – variável dicotómica (sim/não; 1/0).

Eis as primeiras seis linhas da *data frame* HL correspondente:

```
> head(HL)
```

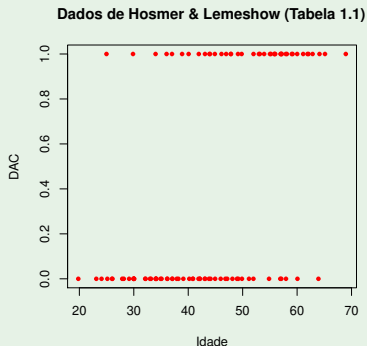
	Idade	DAC
1	20	0
2	23	0
3	24	0
4	25	0
5	25	1
6	26	0

Quer-se relacionar a existência de DAC (variável resposta Y) com a idade (preditor X). O gráfico Y vs. X é pouco prometedor.

Exemplo 1: DAC vs. idade

Exemplo Hosmer & Lemeshow

```
> plot(DAC ~ Idade , data=HL , cex=0.8 , col="red" , pch=16 ,  
+ xlab="Idade" , main="Dados de Hosmer & Lemeshow (Tabela 1.1)")
```



O Modelo Linear

Recorde-se que o **modelo linear** relaciona

- uma **variável resposta** numérica Y com
- **preditores** $X_1, X_2, \dots, X_p$,

através da equação, para n observações **independentes** Y_i :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1(i)} + \beta_2 X_{2(i)} + \dots \beta_p X_{p(i)} + \varepsilon_i ,$$

com $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Isto é, no Modelo Linear:

- $E[Y_i | X_1 = x_{1(i)}, \dots, X_p = x_{p(i)}] = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots \beta_p x_{p(i)} ,$
- Y_i **independentes, com distribuição Normal** (e **variâncias iguais**).

A generalização do modelo linear

Modelo Linear

- $E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots \beta_p x_{p(i)}$,
- Y_i com distribuição Normal.

Num **Modelo Linear Generalizado** há duas extensões:

- $g(E[Y_i]) = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots \beta_p x_{p(i)}$,
com g uma função invertível chamada **função de ligação** (link function).
- Y_i com distribuição na **família exponencial de distribuições**.

Assim, um **MLG** modela o **valor esperado** duma **variável resposta** com **distribuição na família exponencial**, através da equação:

$$\mu_i = E[Y_i] = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots \beta_p x_{p(i)}) .$$

Nota: O **Modelo Linear** é caso particular de **MLG**: a **Normal** pertence á família **exponencial de distribuições** e a **função de ligação** é a **identidade**: $g(x) = x, \forall x$.

Ainda sobre MLGs (cont.)

Ou seja, e nas palavras de Agresti (1990, p.81):

um MLG é um modelo linear para uma transformação da esperança duma variável aleatória cuja distribuição pertence à família exponencial.

Nota: ao contrário do Modelo Linear, nos MLGs não são explicitados erros aleatórios aditivos. A flutuação aleatória da variável resposta é dada directamente pela sua distribuição de probabilidades.

A família exponencial de distribuições

A **família exponencial** de distribuições inclui, entre outras:

- a Normal
- a Poisson (para variáveis de contagem)
- a Bernoulli (para variáveis dicotómicas – binary)
- a “Binomial/ n ” (para proporções de êxitos em n provas de Bernoulli)
- a Gama (distribuição contínua assimétrica);
inclui a Exponencial como caso particular.
- a Gaussiana inversa (distribuição contínua assimétrica).

Nota: Repare-se como a família exponencial inclui distribuições, quer de variáveis aleatórias contínuas, quer de variáveis aleatórias discretas.

As três componentes dum MLG

Na definição de McCullagh e Nelder (1989), um Modelo Linear Generalizado assenta sobre três componentes fundamentais:

1) Componente aleatória (random component):

A variável resposta Y que se quer modelar, tratando-se duma:

- variável aleatória;
- da qual se recolhem n observações independentes; e
- cuja distribuição de probabilidades faz parte da família exponencial de distribuições (definida mais adiante);

Nota: a distribuição de probabilidades da variável resposta aleatória Y já não se restringe à Normal, podendo ser qualquer distribuição numa classe designada família exponencial de distribuições. Algumas generalizações de GLMs admitem distribuições além da família exponencial.

As três componentes dum MLG (cont.)

2) Componente Sistemática:

Consiste numa combinação linear de variáveis preditoras, admitidas não aleatórias.

Havendo p variáveis preditoras e n observações:

$$\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \beta_3 x_{3(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} .$$

Os preditores podem ser variáveis numéricas, factores ou uma mistura de ambos, tal como no Modelo Linear.

Define-se a matriz do modelo $\mathbf{X}_{n \times (p+1)}$ de forma idêntica ao Modelo Linear: uma primeira coluna de uns (associada à constante aditiva) e p colunas adicionais dadas pelas observações de cada variável preditora (variáveis indicatrizes, no caso de factores).

As três componentes dum MLG (cont.)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \cdots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \cdots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \cdots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \cdots & x_{p(n)} \end{bmatrix}$$

O vector da componente sistemática do modelo é dado por:

$$\vec{\eta} = \mathbf{X}\vec{\beta},$$

sendo $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ o vector de coeficientes que define as n combinações lineares (afins) das variáveis preditoras, dado em $\vec{\eta}$.

As três componentes dum MLG (cont.)

3) Função de ligação (link function):

uma função diferenciável e estritamente monótona g que associa as componentes aleatória e sistemática, através duma relação da forma:

$$\begin{aligned}g(\mu_i) &= g(E[Y_i]) = \vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta} \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} \quad (\forall i = 1 : n)\end{aligned}$$

sendo $\vec{x}_{[i]}^t$ a i -ésima linha da matriz $\mathbf{X}$, com os valores dos preditores na i -ésima observação.

O valor esperado de Y , dados os valores dos preditores, é então:

$$\mu_i = g^{-1}(\vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta}) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)})$$

A família exponencial de distribuições

Diz-se que uma variável aleatória Y tem distribuição na família exponencial (bi-paramétrica) definida por McCullagh & Nelder (1989), se a sua função densidade (caso Y contínua) ou de massa probabilística (se Y discreta) se puder escrever na forma:

$$f(y \mid \theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$$

onde

- θ e ϕ são parâmetros (escalares reais); e
- $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ são funções reais conhecidas.

Fórmulas para valor esperado e variância

Se Y é uma v.a. com distribuição na família exponencial de distribuições, de parâmetros θ e ϕ , e funções $a(\phi)$, $b(\theta)$ e $c(y, \phi)$,

Os parâmetros designam-se:

- θ – parâmetro natural ou parâmetro canónico; e
- ϕ – parâmetro de dispersão.

Verificam-se as seguintes expressões para o valor esperado $E[Y]$ e a variância $V[Y]$:

- $\mu = E[Y] = b'(\theta)$
- $V[Y] = b''(\theta) a(\phi)$

A Normal

A família exponencial inclui a distribuição Normal, cuja f. densidade é:

$$\begin{aligned}f(y|\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} = e^{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)} e^{-\left(\frac{y^2-2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} \\&= e^{-\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \left(\frac{y^2-2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} = e^{\frac{y\mu-\mu^2}{\sigma^2} - \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{y^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

é da forma $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$, com:

- $\theta = \mu$ (parâmetro natural)
- $\phi = \sigma^2$ (parâmetro de dispersão)
- $b(\theta) = \frac{\theta^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}$
- $a(\phi) = \phi = \sigma^2$
- $c(y, \phi) = -\ln(\sqrt{2\pi\phi}) - \frac{y^2}{2\phi} = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{y^2}{2\sigma^2}$

A Bernoulli

A variável aleatória dicotómica (binária) Y diz-se de Bernoulli com parâmetro p , se toma valor 1 com probabilidade p e valor 0 com probabilidade $1 - p$.

Para os valores $y = 0$ ou $y = 1$, a função de massa probabilística duma Bernoulli pode escrever-se como:

$$\begin{aligned}f(y|p) &= p^y(1-p)^{1-y} = e^{\ln[p^y(1-p)^{(1-y)}]} = e^{\ln p^y + \ln(1-p)^{(1-y)}} \\&= e^{y \ln p + \ln(1-p) - y \ln(1-p)} = e^{y \ln \left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p)}\end{aligned}$$

que é da família exponencial $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$, com:

- $\theta = \ln \left(\frac{p}{1-p} \right)$
- $\phi = 1$
- $b(\theta) = \ln(1 + e^\theta) = \ln \left(1 + \frac{p}{1-p} \right) = \ln \left(\frac{1}{1-p} \right) = -\ln(1-p)$
- $a(\phi) = \phi = 1$
- $c(y, \phi) = 0$

MLGs para variáveis resposta dicotómicas

Considere-se um Modelo com **variável resposta dicotómica (binária)**, i.e., que apenas toma dois possíveis valores: 0 e 1, e cuja distribuição é **Bernoulli**:

$$Y = \begin{cases} 1 & , \quad p \\ 0 & , \quad 1-p \end{cases}$$

O valor esperado da i -ésima observação de Y é (também) a probabilidade de êxito:

$$E[Y] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Admite-se que o parâmetro p varia nas n observações de Y (p_i para Y_i).

Uma função de ligação relaciona a probabilidade de êxito p_i com uma combinação linear dos preditores:

$$g(E[Y_i]) = g(p_i) = \vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad E[Y_i] = p_i = g^{-1}(\vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta}) ,$$

com $\vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_{1_i} + \beta_2 x_{2_i} + \dots + \beta_p x_{p_i}$.

Funções de ligação

A mais simples é a **ligação identidade**: $g(\mu) = \mu$, que é a função ligação utilizada no Modelo Linear.

Cada distribuição da família exponencial, tem uma função de ligação que torna o valor esperado da variável resposta igual ao parâmetro natural, θ .

Função de ligação canónica

Num Modelo Linear Generalizado, a função $g(\cdot)$ diz-se uma **função de ligação canónica** para a variável resposta Y , se $g(E[Y]) = \theta$.

As funções de ligação canónica são úteis porque simplificam o estudo do Modelo. A ligação canónica representa de alguma forma uma função de ligação “natural” para o respectivo tipo de distribuição da variável resposta.

O Modelo Linear como um MLG

Eis alguns **exemplos de MLGs**:

O Modelo Linear

O Modelo Linear é um caso particular de MLG, em que:

- cada uma das n observações da variável resposta Y tem **distribuição Normal, com variância constante σ^2** ;
- a **função de ligação** é a **função identidade**, pois:

$$\mu = E[Y] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p .$$

A função de ligação identidade é a ligação canónica para a distribuição Normal, pois $\theta = \mu = E[Y]$.

A Regressão Logística

Regressão Logística

A função de ligação **canónica** da distribuição Bernoulli é o **logit**, que transforma $p = E[Y]$ no parâmetro natural $\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$:

$$g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),$$

Um MLG para variáveis resposta dicotómicas, com a função de ligação **logit** é conhecido por **Regressão Logística**.

A função de ligação **logit** é o logaritmo do quociente entre a probabilidade de Y tomar o valor 1 (“êxito”) e a probabilidade de tomar o valor 0 (“fracasso”). Esse quociente é conhecido em inglês por **odds** (**chances** em português). A função de ligação **logit** designa-se o **log-odds**.

A Regressão Logística (cont.)

Dado um conjunto $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ de observações nas variáveis preditoras, tem-se com este modelo:

$$g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p = \vec{x}^t \vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = e^{\vec{x}^t \vec{\beta}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} = e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p} = 1 + e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{1 + e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}}}.$$

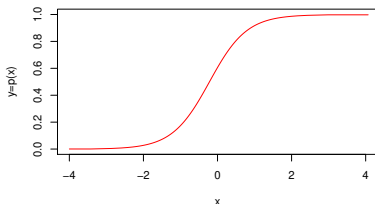
Numa Regressão Logística, a relação entre a probabilidade de êxito $p = E[Y]$ e os valores das variáveis preditoras, $\vec{x}$, é:

$$p(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = \frac{1}{1 + e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p)}}$$

A Regressão Logística (cont.)

No caso duma **única** variável preditora **quantitativa**, a relação entre Y e X é uma **curva logística**, daí a designação **Regressão Logística**.

$$p(x) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}}$$



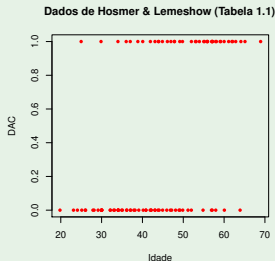
É uma função crescente, caso $\beta_1 > 0$, e decrescente caso $\beta_1 < 0$.

Quando há vários preditores, $p(\vec{x}) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p)}}$ define uma **hipersuperfície** em $\mathbb{R}^{p+1}$.

Novamente o exemplo DAC

Dados Hosmer & Lemeshow

- idade – numérica;
- doença arterial coronária – variável dicotómica (sim/não; 1/0).



A variável resposta é dicotómica (binária). Será preciso relacionar $p = E[Y]$, a probabilidade de ter doença arterial coronária, com a idade X .

Exemplo: A função de ligação

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

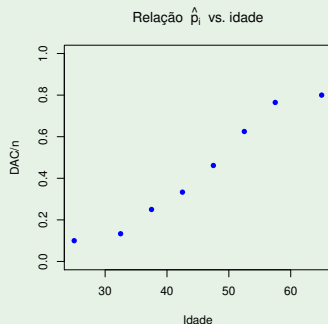
Para procurar uma função de ligação adequada, é necessário outro gráfico, que visualize a relação entre idade e probabilidade de DAC.

- Havendo repetições para cada idade, pode estimar-se p_i a partir da frequência relativa de DAC na i -ésima idade;
- Havendo poucas repetições em cada idade, pode-se agrupar as observações em classes de idade.

Classe	n_i	DAC	$\hat{p}_i$
20-30-	10	1	0.100
30-35-	15	2	0.133
35-40-	12	3	0.250
40-45-	15	5	0.333
45-50-	13	6	0.462
50-55-	8	5	0.635
55-60-	17	13	0.765
60-70-	10	8	0.800

Exemplo: $\hat{p}_i$ vs. idade

Eis o gráfico das probabilidades estimadas vs. idade:



Nota: Aqui “idade” é o ponto médio de cada classe de idade.

Temos uma **relação sigmóide**. Talvez **logística**?

Exemplo 1: criando a tabela no

Para criar a tabela do acetato 25, usou-se a função `hist`, que permite agrupar as idades em classes de idade. Com o argumento `plot=FALSE`, em vez de produzir o histograma, o comando devolve a informação usada.

Começamos por definir as fronteiras das classes:

```
> frclass <- c(20,30,35,40,45,50,55,60,70)
> hist(HL$Idade, breaks=frclass, plot=FALSE, right=FALSE)
$breaks      <--  fronteiras das classes
[1] 20 30 35 40 45 50 55 60 70
$counts      <--  frequências absolutas
[1] 10 15 12 15 13  8 17 10
$density     <--  alturas rectângulos histograma
[1] 0.010 0.030 0.024 0.030 0.026 0.016 0.034 0.010
$mids       <--  pontos intermédios de cada classe
[1] 25.0 32.5 37.5 42.5 47.5 52.5 57.5 65.0
[...]
```

O argumento `right=FALSE` abre à direita os intervalos das classes.

Exemplo 1: a tabela (cont.)

Seleccionam-se as componentes `counts` e `mids` para construir duas colunas da tabela:

```
> info <- hist(HL$Idade, breaks=frclass, plot=FALSE, right=FALSE)
> HL.tab <- data.frame(idade=info$mids, nobs=info$counts)
> HL.tab
```

	idade	nobs
1	25.0	10
2	32.5	15
3	37.5	12
4	42.5	15
5	47.5	13
6	52.5	8
7	57.5	17
8	65.0	10

Falta a coluna com o número de pacientes com DAC em cada classe. Para a obter, repetimos procedimentos, mas seleccionando apenas as linhas de HL em que DAC tem valor 1.

Exemplo 1: os dados tabelados

Eis o resto da tabela, incluindo os nomes de linhas:

```
> HL.tab$DAC <-          <-- cria uma nova coluna de nome DAC
+   hist(HL$Idade[HL$DAC==1], breaks=frclass, plot=F, right=F)$counts

> rownames(HL.tab) <-    <-- atribui os nomes de linhas da tabela
+   paste("[", frclass[-9] , ",", frclass[-1] , "[", sep=" ")

> HL.tab
```

	idade	nobs	DAC
[20,30[	25.0	10	1
[30,35[	32.5	15	2
[35,40[	37.5	12	3
[40,45[	42.5	15	5
[45,50[	47.5	13	6
[50,55[	52.5	8	5
[55,60[	57.5	17	13
[60,70[	65.0	10	8

O gráfico no acetato 26 foi obtido com o comando:

```
> plot(DAC/nobs ~ idade , ylim=c(0,1) , data=HL.tab ,
+   main=expression(paste("Relação ", hat(p)[i] , "vs. idade")), pch=16, col="blue")
```

Resposta dicotómica e Binomial

Agrupar as idades em classes transforma a variável resposta Bernoulli (1/0) Y_i , numa variável resposta Y_j que conta, em cada classe j , o número de “êxitos” (uns) nas n_j provas de Bernoulli dessa classe.

Para observações independentes, Y_j tem distribuição Binomial:
 $Y_j \sim B(n_j, p_j)$, onde p_j é a probabilidade de “êxito” na classe j .

A Binomial não é da família exponencial. Mas a proporção de êxitos em n provas de Bernoulli, $W = Y/n$, sim (se n conhecido).

Existe ligação íntima, no contexto de MLGs, entre considerar que temos:

- n observações de variáveis resposta Bernoulli, com parâmetros p_j ; ou
- m observações de variáveis resposta 'Binomial/ n ' $W_j = \frac{Y_j}{n_j}$, com $Y_j \sim B(n_j, p_j)$.

A ligação canónica, quer da Bernoulli, quer da Binomial/ n é a função logit:

$$g(p) = \ln \left(\frac{p}{1-p} \right)$$

A 'Binomial/n'

Se $X \sim B(n, p)$, tem-se $P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$, com $E[X] = np$ e $V[X] = np(1 - p)$.

X não pertence à família exponencial, mas

$Y = \frac{1}{n}X$ tem distribuição na família exponencial.

Sabemos que $E[X] = np$ e $V[X] = np(1 - p)$. Logo,

- $E[Y] = E[\frac{1}{n}X] = \frac{1}{n}E[X] = \frac{1}{n}np = p$
- $V[Y] = V[\frac{1}{n}X] = \frac{1}{n^2}V[X] = \frac{1}{n^2}np(1 - p) = \frac{p(1-p)}{n}$

A 'Binomial/n' (cont.)

Tem-se $P[Y=y] = P[X=ny]$. A função de massa probabilística de Y pode escrever-se da seguinte forma, para $y \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$:

$$\begin{aligned} f(y|p) &= \binom{n}{ny} p^{ny} (1-p)^{n-ny} = e^{\ln \left[\binom{n}{ny} \right] + \ln p^{ny} + \ln (1-p)^{(n-ny)}} \\ &= e^{\ln \left[\binom{n}{ny} \right] + ny \ln p + n \ln (1-p) - ny \ln (1-p)} = e^{\frac{y \ln \left(\frac{p}{1-p} \right) + \ln (1-p)}{\frac{1}{n}} + \ln \left[\binom{n}{ny} \right]} \end{aligned}$$

que é da família exponencial $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$, com:

- $\theta = \ln \left(\frac{p}{1-p} \right)$
- $\phi = \frac{1}{n}$
- $b(\theta) = \ln (1 + e^\theta) = \ln \left(1 + \frac{p}{1-p} \right) = \ln \left(\frac{1}{1-p} \right) = -\ln (1-p)$
- $a(\phi) = \phi = \frac{1}{n}$
- $c(y, \phi) = \ln \left[\binom{n}{ny} \right]$

No R, o comando para ajustar Modelos Lineares Generalizados é `glm`.

Há três argumentos fundamentais nesta função:

`formula` indica a componente aleatória (variável resposta) e a componente sistemática (preditores), de forma análoga à usada no modelo linear:

$$y \sim x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p$$

`family` indica simultaneamente a distribuição de probabilidades da componente aleatória Y e a função de ligação do modelo.

`data` indica a *data frame* onde se encontram as variáveis.

GLMs no (cont.)

A indicação da distribuição de probabilidades de Y faz-se através duma palavra-chave, que se segue ao nome do argumento `family`.

Por exemplo, um modelo com componente aleatória Bernoulli ou Binomial/ n , indica-se assim:

```
family = binomial
```

Por omissão, é usada a **função de ligação canónica** dessa distribuição.

Caso se deseje **outra função de ligação** (implementada) acrescenta-se ao nome da distribuição, entre parênteses, o argumento `link` com a especificação da função de ligação.

Por exemplo, um modelo probit pode ser indicado da seguinte forma:

```
family = binomial(link=probit)
```

Exemplo: o ajustamento do modelo

Assim, ajusta-se um MLG no R invocando o comando `glm` com três argumentos:

`glm(formula, family, data)`

Numa **Regressão Logística**,

- `family=binomial`.

Não é necessário especificar a função de ligação: por omissão é usada a ligação canónica da distribuição especificada.

- podem usar-se dados numa de 2 formas:
 - ▶ observações dicotómicas individuais (como a *data frame* HL);
 - ▶ observações tabeladas para valores repetidos do(s) preditor(es) (como a *data frame* HL.tab).

As formulas para a Regressão Logística

As fórmulas do comando `glm` são semelhantes às do Modelo Linear:

$$y \sim x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

Mas numa Regressão Logística, aos dois tipos de dados possíveis correspondem objectos `y` de natureza diferente:

- Se dados contêm observações individuais, `y` é vector de 0s e 1s:

```
> glm(DAC ~ Idade , family=binomial , data=HL)
```

- Se os dados estão tabelados, `y` deve ser uma matriz de duas colunas: uma com o número de “sim”s e outra com os número de “não”s, para cada valor (ou ponto médio da classe) do(s) preditor(es):

```
> glm(cbind(DAC,nobs-DAC) ~ idade , family=binomial, data=HL.tab)
```

De novo o exemplo de Hosmer & Lemeshow

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Ajustar o modelo com base nas observações dicotómicas individuais:

```
> glm(DAC ~ Idade , family=binomial, data=HL)
```

```
Call: glm(formula = DAC ~ Idade , family = binomial , data = HL)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	Idade	
-5.3095	0.1109	<---- parâmetros estimados

A equação da logística ajustada é:

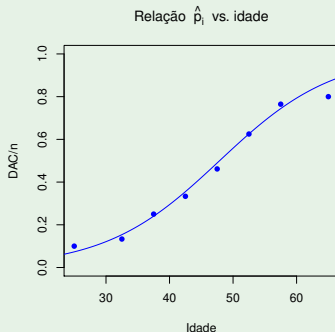
$$y = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 x)}} = \frac{1}{1 + e^{-(-5.3095 + 0.1109x)}}$$

Exemplo (cont.)

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Sobrepondo a logística ajustada ao gráfico dos $\hat{p}_i$ vs. idade:

```
> logistica <- function( b0 , b1 , x ){ 1/(1+exp(-(b0+b1*x))) }  
> curve(logistica(b0=-5.3095, b1=0.11109, x), from=20, to=70, col="blue", add=TRUE)
```



Exemplo: ajustamento do modelo (cont.)

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Ajustar o modelo com base nos dados tabelados:

```
> glm( cbind(DAC,nobs-DAC) ~ idade , family=binomial, data=HL.tab)
```

```
Call: glm(formula=cbind(DAC,nobs-DAC)~idade, family=binomial,data=HL.tab)
```

Coefficients:

(Intercept)	idade	
-5.091	0.105	<---- parâmetros estimados

A equação da logística ajustada é:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 x)}} = \frac{1}{1 + e^{-(-5.091 + 0.105x)}}$$

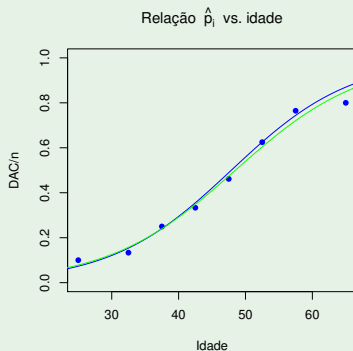
Nota: A pequena discrepância em relação ao ajustamento anterior resulta do agrupamento em classes de idade: os dados são diferentes.

Exemplo: ajustamento do modelo (cont.)

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Sobrepondo a logística ajustada ao gráfico dos $\hat{p}_i$ vs. idade (e à curva ajustada antes):

> `curve(logistica(b0=-5.091, b1=0.105, x), from=20, to=70, col="green", add=TRUE)`



O resultado do comando `glm`

Tal como o comando `lm`, também o comando `glm` produz uma *list*. Nas componentes dessa lista há informação sobre o ajustamento.

```
> HLtab.glm <- glm(cbind(DAC,nobs-DAC)~idade,family=binomial,data=HL.tab)
> names(HLtab.glm)
```

[1] "coefficients"	"residuals"	"fitted.values"	"effects"
[5] "R"	"rank"	"qr"	"family"
[9] "linear.predictors"	"deviance"	"aic"	"null.deviance"
[13] "iter"	"weights"	"prior.weights"	"df.residual"
[17] "df.null"	"y"	"converged"	"boundary"
[21] "model"	"call"	"formula"	"terms"
[25] "data"	"offset"	"control"	"method"
[29] "contrasts"	"xlevels"		

Para aprofundar cada componente consultar: `help(glm)`

Para *invocar uma componente* usa-se a referência usual de listas:

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> HLtab.glm$coef
```

(Intercept)	idade
-5.0907332	0.1050191

O comando `coef`

Como para os Modelos Lineares, existem comandos que facilitam a extracção de informação dum ajustamento de MLG. Eis algumas:

`coef` – devolve um vector com os valores estimados dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$, ou seja, com os valores $b_0, b_1, \dots, b_p$:

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> HL.glm <- glm(DAC ~ Idade, family=binomial, data=HL)
> coef(HL.glm)
```

(Intercept)	idade
-5.3094534	0.1109211

O comando `predict`

`predict` – por omissão, devolve os valores da combinação linear estimada dos preditores usados no ajustamento, ou seja, da componente sistemática $b_0 + b_1 x_{1(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}$.

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> predict(HLtab.glm)
```

```
      [20,30[      [30,35[      [35,40[      [40,45[      [45,50[      [50,55[      [55,60[      [60,70[  
-2.4652550 -1.6776115 -1.1525158 -0.6274202 -0.1023245  0.4227711  0.9478668  1.7355102
```

```
> predict(HL.glm)
```

```
      1      2      3      4      5      6      7  
-3.09103053 -2.75826710 -2.64734596 -2.53642482 -2.53642482 -2.42550368 -2.42550368  
.....  
      99     100  
1.90042087 2.34410544
```

O comando `predict` (cont.)

Pode também usar-se para estimar a combinação linear de valores *não* usados no ajustamento.

Os novos valores são dados numa *data frame* com nomes iguais aos usados nos dados originais.

Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> predict(HL.glm, newdata=data.frame(Idade=26))
```

```
      1  
-2.425504
```

```
> predict(HLtab.glm, newdata=data.frame(idade=c(26,53,74)))
```

```
      1      2      3  
-2.3602358  0.4752807  2.6806824
```

O comando `fitted`

`fitted` – devolve os valores ajustados do valor esperado de Y_i , ou seja, de $\hat{p}_i = g^{-1}(b_0 + b_1 x_{1(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})$.

```
> fitted(HLtab.glm)
```

```
      [20,30[      [30,35[      [35,40[      [40,45[      [45,50[      [50,55[      [55,60[      [60,70[  
0.07833012 0.15741201 0.24002985 0.34809573 0.47444116 0.60414616 0.72068596 0.85011588
```

Resultado análogo é obtido com o comando `predict`, usando o argumento `type="response"`:

```
> predict(HLtab.glm, type="response")
```

```
      [20,30[      [30,35[      [35,40[      [40,45[      [45,50[      [50,55[      [55,60[      [60,70[  
0.07833012 0.15741201 0.24002985 0.34809573 0.47444116 0.60414616 0.72068596 0.85011588
```

Assim, pode-se estimar os valores de $\hat{p}$ para novos valores dos preditores.

```
> predict(HLtab.glm, newdata=data.frame(idade=c(26,53,74)),type="response")
```

```
      1      2      3  
0.0862556 0.6166329 0.9358771
```

Notas sobre a Regressão Logística

- A função logística tem boas propriedades para representar uma **probabilidade**: para *qualquer* valor da componente sistemática, a função logística

$$p(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p)}}$$

toma valores entre 0 e 1. O mesmo não acontece com uma relação linear $p(x_1, \dots, x_p) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$, que toma valores em $\mathbb{R}$.

- No caso de haver uma **única variável preditora quantitativa**, trocando os acontecimentos associados aos valores 0 e 1, uma função decrescente para $p = P[Y = 1]$ transforma-se numa função crescente.

Mais notas sobre a regressão logística

No caso de haver uma única variável preditora quantitativa, o parâmetro β_1 tem a seguinte interpretação:

- como

$$\frac{p(x)}{1-p(x)} = e^{\beta_0 + \beta_1 x} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x},$$

cada aumento de uma unidade na variável preditora X traduz-se num efeito multiplicativo sobre os *odds*, de e^{β_1} :

$$\frac{p(x+1)}{1-p(x+1)} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1(x+1)} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x} \cdot e^{\beta_1} = \frac{p(x)}{1-p(x)} \cdot e^{\beta_1}.$$

- o que é o mesmo que dizer que se traduz num efeito aditivo, de β_1 unidades, sobre os *log-odds*:

$$\log \left[\frac{p(x+1)}{1-p(x+1)} \right] = \log \left[\frac{p(x)}{1-p(x)} \right] + \beta_1.$$

Mais notas sobre a Regressão Logística

Quando há **mais do que uma variável preditora quantitativa**:

- a função de ligação *logit* gera uma **relação logística** para a probabilidade de êxito p , **como função dos valores da parte sistemática η** (combinação linear das variáveis predictoras).
- a **interpretação dos coeficientes β_j** generaliza-se: um aumento de uma unidade na variável preditora j (mantendo as restantes constantes) traduz-se numa multiplicação dos *odds* por um factor e^{β_j} .

Para **preditores categóricos (factores)**,

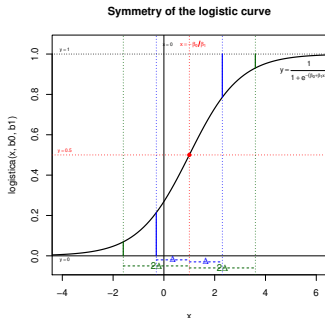
- seja $\vec{\mathcal{J}}_j$ uma variável **indicatriz**. O correspondente parâmetro β_j indica o incremento nos *log-odds* resultante de uma observação passar a pertencer à categoria de que $\vec{\mathcal{J}}_j$ é indicatriz.

Características da curva logística

A relação logística pode ser demasiado rígida. Com um único preditor numérico, a logística $f(x) = [1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}]^{-1}$ tem um ponto de inflexão associado à probabilidade $p = 0.5$, em torno do qual há simetria da curva:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \Rightarrow f\left(-\frac{\beta_0}{\beta_1}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\frac{\beta_0}{\beta_1} - \Delta\right) = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 \Delta}} = 1 - f\left(-\frac{\beta_0}{\beta_1} + \Delta\right)$$



Estimação de parâmetros em MLGs

A estimação dos parâmetros β_j em Modelos Lineares Generalizados é feita pelo **Método da Máxima Verosimilhança**.

Assim, ao contrário do que acontece com o Modelo Linear, em MLGs as hipóteses distribucionais são cruciais para a estimação dos parâmetros.

O facto das distribuições consideradas em MLGs pertencerem à família exponencial de distribuições gera algumas particularidades na estimação.

Verosimilhança na família exponencial

A função verosimilhança para n observações independentes $y_1, y_2, \dots, y_n$ numa qualquer distribuição da família exponencial é:

$$\mathbf{L}(\vec{\theta}, \vec{\phi} ; y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta_i, \phi_i) = e^{\sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right]}$$

Maximizar a verosimilhança equivale a maximizar a log-verosimilhança:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{\phi} ; y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right]$$

Onde estão os parâmetros do modelo, β_j ?

Máxima Verosimilhança em MLGs

Num MLG, a componente sistemática e o valor esperado da variável resposta estão relacionados por $g(E[Y]) = \vec{x}^t \vec{\beta}$.

No caso de uma **função de ligação canónica** tem-se $\theta = \vec{x}^t \vec{\beta}$.

Em geral, **pode escrever-se a log-verosimilhança como função dos parâmetros do modelo, $\mathcal{L}(\vec{\beta})$** , e os β_j s estão associados ao parâmetro natural θ .

Estimar os parâmetros pelo método da máxima verosimilhança consiste em escolher o vector $\vec{\beta}$ que torne máxima a função de log-verosimilhança $\mathcal{L}(\vec{\beta})$.

NOTA: Para já, admite-se conhecido o parâmetro de dispersão ϕ , como no caso da Bernoulli e 'Binomial/n'.

Máxima Verosimilhança em MLGs (cont.)

A maximização da função de $p+1$ variáveis $\mathcal{L}(\vec{\beta})$ tem como condição necessária:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} = 0, \quad \forall j = 0 : p$$

Admite-se que as funções $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ são suficientemente regulares para que as operações envolvidas estejam bem definidas.

No caso de um Modelo Linear Generalizado genérico, não existe a garantia de que haja máximo desta função log-verosimilhança (para valores admissíveis dos parâmetros $\vec{\beta}$), nem que, existindo máximo, este seja único.

Nos casos concretos abordados nesta disciplina, a situação não cria dificuldades.

Exemplo: o caso da Regressão Logística

No Modelo de Regressão Logística, as n observações independentes referem-se a uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

A sua função verosimilhança é dada por:

$$\mathbf{L}(\vec{\mathbf{p}} ; \vec{\mathbf{y}}) = \prod_{i=1}^n e^{\ln(1-p_i) + y_i \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)}$$

e a log-verosimilhança por:

$$\mathcal{L}(\vec{\mathbf{p}} ; \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^n \left[\ln(1-p_i) + y_i \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \right]$$

Como a função de ligação é $g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \vec{\mathbf{x}}^t \vec{\boldsymbol{\beta}}$, a log-verosimilhança é função dos parâmetros $\vec{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\mathcal{L}(\vec{\boldsymbol{\beta}} ; \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^n \left[-\ln\left(1 + e^{\vec{\mathbf{x}}_i^t \vec{\boldsymbol{\beta}}}\right) + y_i \vec{\mathbf{x}}_i^t \vec{\boldsymbol{\beta}} \right]$$

Estimação na Regressão Logística (cont.)

Tem-se:

$$\mathcal{L}(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left(\beta_0 y_i + \sum_{k=1}^p y_i x_{k(i)} \beta_k \right) - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + e^{\beta_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \beta_k} \right)$$

Condição necessária para a existência de extremo da log-verosimilhança no ponto $\vec{\beta} = \vec{\hat{\beta}}$ é que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n y_i x_{j(i)} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}} \cdot x_{j(i)} = 0 \quad \forall j = 1 : p \end{cases}$$

Estas $p+1$ equações normais formam um **sistema não-linear** de equações nas $p+1$ incógnitas $\hat{\beta}_j$ ($j = 0 : p$).

Algoritmos de estimação

Em geral, o sistema de $p+1$ equações normais associado à maximização da função de log-verosimilhança num Modelo Linear generalizado é um sistema não-linear:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} = 0 \quad , \quad \forall j = 0 : p.$$

Algoritmos numéricos de resolução utilizados no contexto de MLGs são **adaptações do algoritmo de Newton-Raphson**, conhecidos por vários nomes: Método Iterativo de Mínimos Quadrados Ponderados (**Iterative Weighted Least Squares**, IWLS) ou Re-ponderados (**or Reweighted**, IRLS), ou ainda Método de Fisher (**Fisher Scoring Method**).

O **Método de Newton-Raphson** trabalha com uma **aproximação de segunda ordem** (fórmula de Taylor) **da função log-verosimilhança**, com desenvolvimento em torno duma estimativa inicial do vector $\vec{\beta}$.

Algoritmos de estimação (cont.)

Método de Newton-Raphson

Sejam:

- $\vec{\beta}^{[0]}$, uma **solução inicial** para $\vec{\beta}$;
- $\overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}}$ o **vector gradiente** de $\mathcal{L}$ (vector das derivadas parciais $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_j}$) em $\vec{\beta}$;
- $\mathcal{H}_{\vec{\beta}}$ a **matriz Hessiana** das segundas derivadas parciais da função $\mathcal{L}(\cdot)$, cujo elemento (j, m) é:

$$(\mathcal{H}_{\vec{\beta}})_{(j,m)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_j \partial \beta_m}$$

Tem-se a aproximação de 2a. ordem dada pela **fórmula de Taylor**:

$$\mathcal{L}(\vec{\beta}) \approx \mathcal{L}_*(\vec{\beta}) = \mathcal{L}(\vec{\beta}^{[0]}) + (\overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}^{[0]}})^t (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]}) + \frac{1}{2} (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]})^t \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}} (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]})$$

Em vez de maximizar $\mathcal{L}(\vec{\beta})$, maximiza-se a aproximação $\mathcal{L}_*(\vec{\beta})$.

Algoritmos de estimação (cont.)

O cálculo do vector gradiente é simples para produtos internos ou formas quadráticas:

Se $h(\vec{x}) = \vec{a}^t \vec{x}$, tem-se $\frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{a}^t \vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{a}$.

Se $h(\vec{x}) = \vec{x}^t \mathbf{A} \vec{x}$, tem-se $\frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{x}^t \mathbf{A} \vec{x})}{\partial \vec{x}} = 2\mathbf{A}\vec{x}$.

Assim,

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}} = \overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}^{[0]}} + \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}} (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]}).$$

Admitindo a invertibilidade de $\mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}}$, tem-se:

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}^{[0]} - \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}}^{-1} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}^{[0]}}.$$

O algoritmo Newton-Raphson itera esta relação.

Algoritmos de estimação (cont.)

Tome-se:

$$\vec{\beta}^{[i+1]} = \vec{\beta}^{[i]} - \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[i]}}^{-1} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L}_{\vec{\beta}^{[i]}}$$

Notas:

- A possibilidade de aplicar com êxito este algoritmo exige a **existência e invertibilidade das matrizes Hessianas** de $\mathcal{L}$ nos sucessivos pontos $\vec{\beta}^{[i]}$;
- Não está garantida a convergência do algoritmo, mesmo quando existe e é único o máximo da função log-verosimilhança;
- Caso exista um único máximo, a convergência é tanto melhor quanto mais próximo $\vec{\beta}^{[0]}$ estiver do máximo.
- Podem existir **vários máximos locais**, e uma má escolha inicial $\vec{\beta}^{[0]}$ levar à convergência para uma **solução sub-ótima**.

Algoritmos de estimação (cont.)

Método de Fisher

O cálculo da matriz Hessiana da log-verosimilhança nos pontos $\vec{\beta}^{[i]}$ é computacionalmente exigente.

O algoritmo de Fisher (Fisher Scoring Method) é uma modificação do algoritmo de Newton-Raphson, que substitui a matriz Hessiana pela matriz de informação de Fisher, definida como o simétrico da esperança da matriz Hessiana:

$$\mathbf{I}_{\vec{\beta}^{[i]}} = -E \left[\mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[i]}} \right]$$

Assim, a iteração que está na base do Algoritmo de Fisher é:

$$\vec{\beta}^{[i+1]} = \vec{\beta}^{[i]} + \mathbf{I}_{\vec{\beta}^{[i]}}^{-1} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}^{[i]}}$$

Algoritmos (cont.)

Quando se considera uma MLG com a função de ligação canónica, a matriz Hessiana da log-verosimilhança não depende da variável resposta Y , pelo que a Hessiana e o seu valor esperado coincidem.

Logo, neste caso os métodos de Fisher e Newton-Raphson coincidem.

Esta é uma das razões que confere às ligações canónicas a sua importância.

A Regressão Probit

Outro exemplo de MLG é o **modelo probit** de Bliss (1935), muito frequente em Toxicologia.

Modelo *Probit*

Tal como na Regressão Logística, tem-se:

- **variável resposta dicotómica** (com distribuição Bernoulli).
- **componente sistemática**, dada por uma combinação linear de variáveis preditoras.

Diferente da Regressão Logística é a **função de ligação**.

A Regressão Probit (cont.)

Na Regressão Logística, a função de ligação exprime $p = E[Y]$ como uma função logística da componente sistemática $\eta = \vec{x}^t \vec{\beta}$.

No Modelo *Probit*, a probabilidade de êxito e valor esperado, $p = E[Y]$, é dada por outra curva sigmóide, a função de distribuição cumulativa (f.d.c.), Φ , duma Normal Reduzida:

$$p(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = \Phi(\vec{x}^t \vec{\beta})$$

onde Φ indica a f.d.c. duma $\mathcal{N}(0, 1)$.

Esta opção significa considerar como função de ligação a inversa da f.d.c. duma Normal reduzida, ou seja, $g = \Phi^{-1}$:

$$\vec{x}^t \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p = g(E[Y]) = g(p(\vec{x})) = \Phi^{-1}(p(\vec{x})) .$$

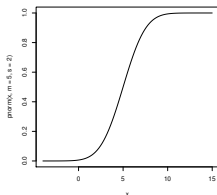
A Regressão Probit (cont.)

No caso de haver uma única variável preditora numérica, tem-se:

$$p(x; \beta_0, \beta_1) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

re-parametrizando com $\beta_0 = -\frac{\mu}{\sigma}$ e $\beta_1 = \frac{1}{\sigma}$.

Assim, a probabilidade de êxito p relaciona-se com a variável preditora X através da f.d.c. duma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, com $\sigma = \frac{1}{\beta_1}$ e $\mu = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$.



A Regressão Probit em toxicologia

No contexto toxicológico, é frequente:

- existir uma **variável preditora X** que indica a **dosagem** (ou **log-dosagem**) dum determinado produto tóxico;
- para cada individuo há um **nível de tolerância t** : a dosagem acima do qual o produto tóxico provoca a morte do indivíduo;
- esse nível de tolerância **varia entre indivíduos** e pode ser **representado por uma variável aleatória T** .

Definindo a variável aleatória binária Y :

$$Y = \begin{cases} 1 & , \text{ individuo morre} \\ 0 & , \text{ individuo sobrevive} \end{cases}$$

Tem-se a relação entre Y e a tolerância T :

$$P[Y = 1 \mid x] = P[T \leq x] = p(x)$$

A Regressão Probit em toxicologia (cont.)

$$P[Y = 1 \mid x] = P[T \leq x] = p(x)$$

Admitindo que a tolerância T segue uma distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$p(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Tem-se o Modelo Probit com X como única variável preditora.

Como $\beta_0 = -\frac{\mu}{\sigma}$ e $\beta_1 = \frac{1}{\sigma}$ (slide 64), os parâmetros da distribuição da tolerância T são dados por:

$$\mu = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{\beta_1}.$$

Regressão Probit no

Ajustemos uma Regressão Probit, no R, aos dados do exemplo DAC:

Dados Hosmer & Lemeshow

Há que especificar a função de ligação, como opção do argumento `family`:

```
> glm(cbind(DAC,nobs-DAC)~idade,family=binomial(link=probit),data=HL.tab)
```

```
Call:  glm(formula = cbind(DAC, nobs - DAC) ~ idade,
           family = binomial(link = probit), data = HL.tab)
```

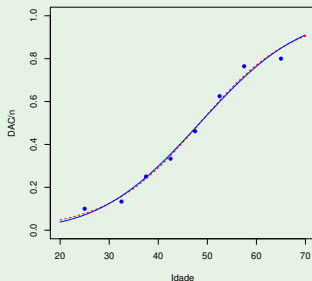
Coefficients:

(Intercept)	idade
-3.0245	0.0624
[...]	

Tal como na Regressão Logística, a variável resposta pode ser uma matriz de duas colunas, indicando o número de “êxitos” e o número de “fracassos” (como acima) ou, alternativamente, como um vector de zeros e uns.

Regressão Probit no R(cont.)

A curva ajustada de probabilidade de DAC sobre idade (x), tem equação: $p(x) = \Phi(-3.0245 + 0.0624x)$. Eis a curva, sobreposta à nuvem de pontos (a tracejado tem-se a curva logística ajustada):



A curva foi traçada com o seguinte comando:

```
> curve(pnorm(-3.0245+0.0624*x), add=TRUE, col="blue")
```

O comando `update`

O modelo *probit* agora ajustado apenas difere, em relação ao modelo de regressão logística (`HLtab.glm`), no argumento `family`, onde se especifica a função de ligação.

O comando do R `update` é útil nestes casos, pois permite re-ajustar um modelo alterando argumentos.

```
> update(HLtab.glm, family=binomial(link=probit))
```

```
Call: glm(formula=cbind(DAC,nobs-DAC)~idade, family=binomial(link=probit), data=HL.tab)
Coefficients:
 (Intercept)      idade
    -3.0245      0.0624
Degrees of Freedom: 7 Total (i.e. Null); 6 Residual
Null Deviance:    28.7
Residual Deviance: 0.6529  AIC: 25.79
```

NOTA: O objecto `HLtab.glm` não foi alterado. E o novo modelo não foi guardado.

A Regressão Probit (cont.)

Para qualquer número de variáveis preditoras, a probabilidade de êxito $p = P[Y = 1]$ é dada, no Modelo Probit, por uma função cujo comportamento é muito semelhante ao do Modelo Logit:

- função estritamente crescente,
- um único ponto de inflexão, quando o preditor linear é nulo: $\mathbf{x}^t \vec{\beta} = 0$,
- a que corresponde uma probabilidade de êxito $p(0) = 0.5$.
- com simetria em torno do ponto de inflexão, isto é, $p(-\eta) = 1 - p(\eta)$, para qualquer η .

Inconvenientes:

- não há interpretação fácil do significado dos parâmetros β_j ;
- a função de ligação é não-canónica.

O modelo log-log do complementar

Modelo log-log do complementar

No mesmo contexto de **variável resposta dicotómica** Y , outra escolha frequente de **função de ligação**, com tradição histórica desde 1922 no estudo de organismos infecciosos consiste em tomar para probabilidade de êxito ($Y = 1$) a função:

$$p(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = 1 - e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}}$$

O **contradomínio** da função agora definida é o intervalo $]0, 1[$.

A função de ligação será, neste caso, da forma:

$$\vec{x}^t \vec{\beta} = g(p(\vec{x})) = \ln[-\ln(1-p(\vec{x}))]$$

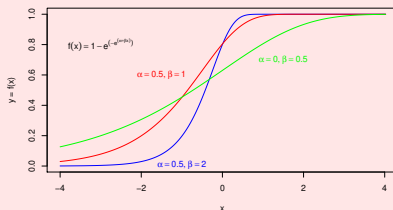
donde a designação **log-log do complementar**.

O modelo log-log do complementar (cont.)

No caso de um único preditor numérico, a função p é a diferença para 1 duma curva de Gompertz ($y = \alpha e^{-\beta e^{-\gamma x}}$) com valor assintótico $\alpha = 1$:

$$p(x) = 1 - e^{-\beta e^{-\gamma x}}.$$

Assim, a função $p(x)$ está associada à função distribuição cumulativa da distribuição de Gumbel:



O modelo log-log do complementar (cont.)

Esta função para p tem analogias e diferenças de comportamento em relação aos Modelos Logit e Probit:

- é igualmente **estritamente monótona**;
- tem igualmente **um único ponto de inflexão**, quando $\eta = 0$;
- mas **o valor de probabilidade associado** já não se encontra a meio caminho na escala de probabilidades, sendo $p(0) = 1 - \frac{1}{e}$;
- isso significa que a “fase inicial” da curva de probabilidades decorre até um valor superior da probabilidade ($1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$) do que nas Regressões *Logit* e *Probit*.

Tal como no Modelo Probit (e ao contrário da Regressão Logística) **os coeficientes β_j da componente sistemática não têm um significado facilmente interpretável.**

Log-log do complementar no

Ajustar o modelo com função de ligação log-log do complementar faz-se especificando o valor `cloglog` no argumento `link`.

```
> update(HLtab.glm, family=binomial(link=cloglog))
```

```
Call: glm(formula=cbind(DAC, nobs-DAC)~idade,  
          family=binomial(link=cloglog), data=HL.tab)
```

Coefficients:

```
(Intercept)      idade  
   -4.00470      0.07311  
[...]
```

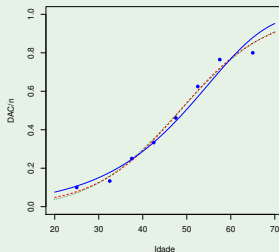
A curva ajustada é:

$$p(x) = 1 - e^{-e^{-4.00470 + 0.07311x}}$$

Log-log do complementar no R(cont.)

A curva ajustada, sobreposta à nuvem de pontos do exemplo DAC, é

$$p(x) = 1 - e^{-e^{-4.00470+0.07311 x}}$$



A tracejado, no gráfico, a curva do modelo probit e a ponteados da regressão logística. A nova curva foi traçada com os seguintes comandos:

```
> cloglog <- function( b0,b1,x ){1-exp(-exp(b0+b1*x))}  
> curve(cloglog(b0=-4.0047,b1=0.07311,x), add=TRUE, col="blue")
```

Outras funções de ligação para respostas binárias

Foram consideradas três funções de ligação em modelos de resposta Bernoulli (ou Binomial/ n), cujas inversas são **sigmóides**. Em dois casos, usaram-se inversas de **funções de distribuição cumulativas**:

- f.d.c. duma Normal reduzida, no Modelo Probit;
- f.d.c. duma Gumbel, no Modelo log-log do Complementar

Uma generalização óbvia consiste em utilizar **outra f.d.c. duma variável aleatória contínua**, gerando novos MLGs de resposta dicotómica.

No R, além das opções acima referidas, pode usar-se uma **f.d.c. da distribuição de Cauchy** (`link=cauchit`).

Inferência: propriedades dos estimadores MV

Propriedades de estimadores de Máxima Verosimilhança

Quaisquer estimadores $\vec{\hat{\beta}}$ de máxima verosimilhança são:

- assintoticamente multinormais
- assintoticamente centrados ($E[\vec{\hat{\beta}}] \rightarrow \vec{\beta}$).
- assintoticamente de matriz de variâncias-covariâncias $\mathbb{I}_{\vec{\beta}}^{-1}$, onde

$$\mathbb{I}_{\vec{\beta}} = -E[\mathcal{H}_{\vec{\beta}}]$$

é a matriz de Informação de Fisher, sendo $\mathcal{H}_{\vec{\beta}}$ a matriz Hessiana da log-verosimilhança $\mathcal{L}$, no ponto $\vec{\beta}$

Conclusão: Pode fazer-se inferência (assintótica) em MLGs!

Inferência em MLGs

Distribuição assintótica de $\vec{\hat{\beta}}$ num MLG

Num Modelo Linear Generalizado, o vector de estimadores de Máxima Verosimilhança, $\vec{\hat{\beta}}$, verifica **assintoticamente**:

$$\vec{\hat{\beta}} \sim \mathcal{N}_{p+1} \left(\vec{\beta}, \mathbb{I}_{\vec{\beta}}^{-1} \right)$$

onde $\mathbb{I}_{\vec{\beta}}$ é a **matriz de informação de Fisher** da log-verosimilhança da amostra, calculada no ponto $\vec{\beta}$.

A **dimensão da amostra** tem uma importância grande para garantir a fiabilidade da aproximação assintótica.

Repare-se na **semelhança** com o resultado distribucional que serve de base à inferência num **modelo linear**. As propriedades da Multinormal podem ser usadas para obter resultados análogos.

Inferência em MLGs (cont.)

Distribuição para combinações lineares dos parâmetros

Dado um MLG (admitindo certas condições de regularidade) e um vector não-aleatório $\vec{a}_{p+1}$, o vector de estimadores de Máxima Verosimilhança $\vec{\beta}$ verifica, **assintoticamente**:

$$\frac{\vec{a}^t \vec{\beta} - \vec{a}^t \vec{\beta}}{\sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\beta}^{-1} \vec{a}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) .$$

O Teorema permite obter intervalos de confiança e testes de hipóteses (aproximados) para combinações lineares dos parâmetros $\vec{\beta}$.

Inferência em MLGs (cont.)

Na expressão que serve de base aos ICs e Testes de Hipóteses surge a inversa da matriz de informação no **ponto desconhecido** $\vec{\beta}$.

Essa matriz desconhecida é substituída por outra, conhecida: a matriz de informação calculada para a **estimativa** $\vec{\beta}$.

Para distribuições com parâmetro de dispersão ϕ desconhecido, existe ainda o **problema (ainda não considerado)** da estimação de ϕ .

Tudo isto reforça a conveniência de **grandes amostras** para que se possa confiar nos resultados.

Inferência em MLGs (cont.)

Intervalos de Confiança (assintóticos) para $\vec{a}^t \vec{\beta}$

Um intervalo assintótico a $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para a combinação linear $\vec{a}^t \vec{\beta}$ é dado por:

$$\left[\vec{a}^t \vec{b} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \quad , \quad \vec{a}^t \vec{b} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \right]$$

sendo $\vec{b}$ o vector das estimativas de $\vec{\beta}$ e $\mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1}$ a inversa da matriz de informação de Fisher da log-verosimilhança, calculada no ponto $\vec{\beta}$.

Intervalos de Confiança (assintóticos) para β_j

$$\left[b_j - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\left(\mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \right)_{[j+1, j+1]}} \quad , \quad b_j + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\left(\mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \right)_{[j+1, j+1]}} \right]$$

Inferência em MLGs (cont.)

Teste de Hipóteses (assintótico)

Teste de hipóteses (assintótico) bilateral a uma combinação linear dos β_j :

- Hipóteses:

$$H_0 : \vec{a}^t \vec{\beta} = c \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vec{a}^t \vec{\beta} \neq c$$

- Estatística do Teste:

$$Z = \frac{\vec{a}^t \hat{\vec{\beta}} - \vec{a}^t \vec{\beta}_{|H_0}}{\sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\vec{\beta}}^{-1} \vec{a}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) ,$$

- Região Crítica: Bilateral. Rejeitar H_0 se $|Z_{calc}| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Definem-se testes unilaterais, com hipóteses e RCs análogas às do modelo linear.

A função `summary`

A função `summary` tem método para MLGs, gerando resultados análogos aos de modelos lineares.

A tabela `Coefficients` tem colunas análogas:

- `Estimate` – valores estimados (b_j) dos parâmetros β_j ;
- `Std.Error` – os respectivos desvios padrão estimados, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}$, i.e., as raízes quadradas dos elementos diagonais da matriz $\mathcal{J}_{\hat{\beta}}^{-1}$;
- `z value` – o valor calculado da estatística $Z = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}$, para um teste às hipóteses $H_0 : \beta_j = 0$ vs. $H_1 : \beta_j \neq 0$;
- `Pr(>|z|)` – o *p-value* (bilateral) da estatística da coluna anterior (calculado numa $\mathcal{N}(0, 1)$).

O teste referido pode servir para determinar a dispensabilidade de algum preditor.

Na listagem do comando `summary` tem-se a informação fundamental para construir ICs ou Testes a parâmetros, num MLG.

```
> summary(HLtab.glm)
```

```
Call:
glm(formula=cbind(DAC, n-DAC) ~ idade, family=binomial, data=HL.tab)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -5.09073      1.09753  -4.638 3.51e-06 ***
Idade         0.10502      0.02308   4.551 5.35e-06 ***
[...]
```

Number of Fisher Scoring iterations: 4 <-- no. passos do algoritmo

A matriz de covariâncias dos estimadores no

O comando `vcov` devolve a matriz de (co-)variâncias dos estimadores $\vec{\hat{\beta}}$, ou seja, a inversa da matriz de informação de Fisher, $\mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1}$.

```
> vcov(HLtab.glm)
      (Intercept)      idade
(Intercept)  1.20457613 -0.0247424726
idade       -0.02474247  0.0005325726
```

Esta é a matriz usada para construir um intervalo assintótico a $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança para a combinação linear $\vec{a}^t \vec{\hat{\beta}}$:

$$\left[\vec{a}^t \vec{b} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \quad , \quad \vec{a}^t \vec{b} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \right]$$

Intervalos de confiança para β_j no

Intervalos de confiança (assintóticos) para os parâmetros individuais β_j são dados pela função `confint.default`.

```
> confint.default(HLtab.glm)
                2.5 %      97.5 %
(Intercept) -7.24185609 -2.9396103
idade        0.05978799  0.1502503
```

Venables & Ripley disponibilizam no módulo MASS um método alternativo (computacionalmente mais exigente) de construir intervalos de confiança em MLGs, denominado *profiling* (ver slide 119). É automaticamente invocado pela função `confint`:

```
> confint(HLtab.glm)
Waiting for profiling to be done...
                2.5 %      97.5 %
(Intercept) -7.42548805 -3.0887956
idade        0.06276942  0.1539715
```

Exemplo: Exercício 1

Consideremos MLGs que misturam preditores numéricos e factores.

Exemplo: larva do tabaco (Venables & Ripley)

Um estudo da resistência da larva do tabaco (tobacco budworm) *heliiothis virescens* a doses duma substância tóxica.



Lotes de 20 traças de cada sexo foram expostas a doses do tóxico (em μg). Ao fim de 3 dias registou-se o número de indivíduos mortos em cada lote. Os resultados estão na seguinte tabela.

Sexo	Dose					
	1	2	4	8	16	32
Machos	1	4	9	13	18	20
Fêmeas	0	2	6	10	12	16

Cada valor é uma realização duma **variável resposta Binomial** (número de mortes em $n = 20$ larvas expostas ao tóxico).

Um exemplo de MLG (cont.)

Exemplo: larva do tabaco

Criação de *data frame* tabaco com os dados:

```
> morte <- c(1,4,9,13,18,20,0,2,6,10,12,16)
> sexo <- factor(rep(c("macho","femea"),c(6,6)))
> dose <- rep(2^(0:5),2)
> tabaco <- data.frame(morte,sexo,dose)
> tabaco
```

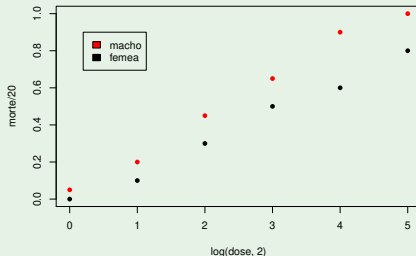
	morte	sexo	dose
1	1	macho	1
2	4	macho	2
3	9	macho	4
4	13	macho	8
5	18	macho	16
6	20	macho	32
7	0	femea	1
8	2	femea	2
9	6	femea	4
10	10	femea	8
11	12	femea	16
12	16	femea	32

É frequente em toxicologia usar uma transformação logaritmica (na base 2) de doses que vão sendo duplicadas.

Exercício 1

Exemplo: larva do tabaco

```
> plot(morte/20 ~ log(dose,2),data=tabaco,col=as.numeric(sexo),pch=16)  
> legend(0.2,0.9,legend=c("macho","femea"), fill=c("red","black"))
```



Embora uma relação linear pareça adequada, uma relação sigmóide é estruturalmente mais adequada, por apenas tomar valores em $]0, 1[$.

Exercício 1 no R (cont.)

Para ajustar uma Regressão Probit, utiliza-se a opção `link=probit` na definição do argumento `family`.

Exemplo: larva do tabaco

```
> glm(cbind(morte,20-morte) ~ log(dose,2),  
+      family=binomial(link=probit), data=tabaco)
```

```
Call:  glm(formula = cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2),  
+        family = binomial(link = probit), data = tabaco)
```

Coefficients:

(Intercept)	log(dose, 2)
-1.6431	0.5966

Degrees of Freedom: 11 Total (i.e. Null); 10 Residual

Null Deviance: 124.9

Residual Deviance: 16.41 AIC: 50.52

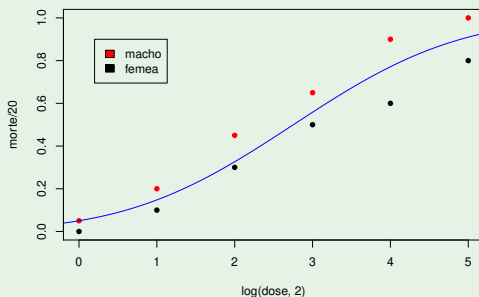
A relação estimada é: $p(x) = \Phi(-1.6431 + 0.5966 \log_2(x))$, sendo x a dose.

Exercício 1 no R (cont.)

Exemplo: larva do tabaco

Sobrepõe-se a curva ajustada à nuvem de pontos, com o comando:

```
> curve(pnorm(-1.6431+0.5966*x), from=-1, to=6, col="blue", add=TRUE)
```



Interpretação toxicológica

Larva do tabaco

Em logaritmos de base 2, as dosagens ensaiadas foram 0, 1, 2, 3, 4, 5.

No contexto toxicológico, podemos afirmar (slide 66) que a tolerância face à dosagem segue uma distribuição $T \sim \mathcal{N}\left(\mu = -\frac{\beta_0}{\beta_1}, \sigma^2 = \frac{1}{\beta_1^2}\right)$.

Com os valores estimados, temos $\hat{\mu} = \frac{1.6431}{0.5966} = 2.754107$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{0.5966^2} = 2.8096$.

Logo, a tolerância à dosagem (em logaritmos de base 2) tem distribuição:

$$T \sim \mathcal{N}\left(2.7541, \underbrace{2.8096}_{=\hat{\sigma}^2}\right).$$

MLGs para variáveis resposta de Poisson

Consideremos agora modelos em que a componente aleatória Y tem **distribuição de Poisson**.

A distribuição de Poisson é frequente na **contagem de acontecimentos aleatórios** raros (quando se pode admitir que não há acontecimentos simultâneos).

Se Y tem distribuição de Poisson, **toma valores em $\mathbb{N}_0$** com probabilidades $P[Y = y] = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$, com um único parâmetro $\lambda > 0$.

Esta distribuição **não é indicada para situações em que seja fixado à partida o número máximo de observações ou realizações do fenómeno**, como sucede com uma Binomial.

A Poisson na família exponencial

Uma variável aleatória discreta tem **distribuição de Poisson** se tem função de massa probabilística $P[Y = y] = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$, para $y \in \mathbb{N}_0$.

Pode re-escrever-se a função de massa probabilística duma Poisson como:

$$f(y|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\ln(\lambda^y/y!)} = e^{-\lambda + \ln(\lambda^y) - \ln(y!)} = e^{-\lambda + y \ln(\lambda) - \ln(y!)}$$

que é da família exponencial $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$, com:

- $\theta = \ln(\lambda)$
- $\phi = 1$
- $b(\theta) = e^\theta = \lambda$
- $a(\phi) = \phi = 1$
- $c(y, \phi) = -\ln(y!)$

Funções de ligação e ligação canónica

O valor esperado de $Y \sim \text{Po}(\lambda)$ é o parâmetro $\lambda = E[Y]$.

Uma **função de ligação** será uma função $g(\cdot)$ tal que:

$$g(E[Y]) = g(\lambda) = \vec{x}^t \vec{\beta},$$

onde $\vec{x}^t \vec{\beta}$ é a componente sistemática do Modelo.

O **parâmetro natural** da distribuição de Poisson é $\theta = \ln(\lambda)$.

Assim, a **função de ligação canónica** para uma componente aleatória com **distribuição de Poisson** é a função de ligação **logarítmica**:

$$g(\lambda) = \ln(\lambda) = \vec{x}^t \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = e^{\vec{x}^t \vec{\beta}}$$

Um Modelo assim definido designa-se um **Modelo Log-Linear**.

Modelos log-lineares

Modelos Log-lineares

São modelos com:

- componente aleatória de Poisson;
- função de ligação logaritmo natural, que é a ligação canónica para as Poisson.

Nestes modelos, o valor esperado da variável resposta Poisson é dado por:

$$\lambda = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p}$$

Nota: a ligação apenas permite valores positivos do parâmetro λ , o que está estruturalmente de acordo com as características do parâmetro λ duma distribuição Poisson.

Interpretação dos parâmetros β_j

No caso de haver uma única variável preditora X , a relação entre o parâmetro $\lambda = E[Y]$ da distribuição Poisson e o preditor fica:

$$\lambda(x) = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x}$$

O aumento de uma unidade no valor do preditor multiplica o valor esperado da variável resposta por e^{β_1} :

$$\lambda(x+1) = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1(x+1)} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x} \cdot e^{\beta_1} = \lambda(x) \cdot e^{\beta_1}.$$

A interpretação generaliza-se para mais do que uma variável preditora. Com p variáveis predictoras tem-se:

$$\lambda(x) = e^{\beta_0} e^{\beta_1 x_1} e^{\beta_2 x_2} \dots e^{\beta_p x_p}.$$

Um aumento de uma unidade no valor do preditor X_j , mantendo as restantes variáveis predictoras constantes, multiplica o valor esperado de Y por e^{β_j} .

Factores preditores e tabelas de contingência

No caso de uma variável indicatriz X_j , tem-se que a pertença à categoria assinalada pela indicatriz X_j multiplica o parâmetro λ da distribuição de Poisson por e^{β_j} .

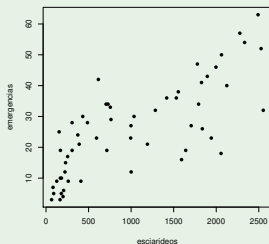
Os modelos log-lineares têm grande importância no estudo de tabelas de contingência, cujos margens correspondem a diferentes factores e cujo recheio corresponde a contagens de observações nos cruzamentos de níveis correspondentes.

Tal como nos casos anteriores, outras funções de ligação são concebíveis para variáveis-resposta com distribuição de Poisson.

Exemplo: Exercício 3 (Modelo Log-linear)

Dados Elisa1 (emergencias de predador)

Quer-se modelar o número de **emergencias** (Y) de adultos dum predador, em função do número de mosquitos (**esciarideos**, x) no substrato de que se alimentam as larvas do predador. **Dados:** *data frame* **Elisa1**.



Há **crescimento curvilíneo** do número médio de **emergencias**.
Se fôr crescimento **exponencial**, tem-se $E[Y] = \gamma e^{\beta_1 x} = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$.

Exemplo: Exercício 3 (cont.)

Dados Elisa1 (emergencias)

Admitindo Y com **distribuição Poisson**, $E[Y] = \lambda$. O crescimento exponencial de $E[Y]$ em função de x é um modelo **log-linear** (canónico para Poisson):

$$\lambda = E[Y] = e^{\beta_0 + \beta_1 x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

```
> Elisa1.glm <- glm(emergencias~esciarideos,family=poisson,data=Elisa1)
```

```
> summary(Elisa1.glm)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	2.632e+00	5.076e-02	51.85	<2e-16 ***
esciarideos	5.248e-04	3.209e-05	16.36	<2e-16 ***

--

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1) <---

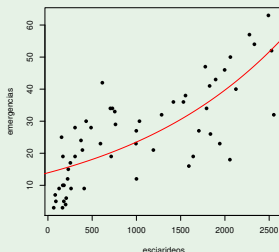
[...]

A curva ajustada é: $\lambda = E[Y] = e^{b_0 + b_1 x} = e^{2.632 + 0.0005248 x}$

Exemplo: Exercício 3 (cont.)

Dados Elisa1 (emergências de predador)

Eis a curva ajustada $\lambda = E[Y] = e^{b_0 + b_1 x} = e^{2.632 + 0.0005248 x}$:



Por cada 100 esciarídeos a mais, o número médio de emergências é dado por:

$$\lambda_{x+100} = e^{100b_1} \times \lambda_x = e^{0.05248} \times \lambda_x = 1.053881 \times \lambda_x.$$

Por cada 100 esciarídeos a mais, o número médio de emergências aumenta $\approx 5,4\%$.

Avaliação da qualidade dum MLG

Conceito importante na **avaliação da qualidade de um MLG** é o conceito de **Desvio** de um Modelo (**deviance** em inglês).

O desvio desempenha nos GLMs um papel análogo ao da Soma de Quadrados Residual nos Modelos Lineares.

No estudo do Modelo Linear foi introduzida a noção de **Modelo Nulo**: um Modelo **sem preditores** e onde toda a variação nos valores observados é variação residual, não explicada pelo Modelo.

No estudo de Modelos Lineares Generalizados é de utilidade um Modelo que ocupa **o extremo oposto na gama de possíveis modelos**: um **modelo saturado**, que tem **tantos parâmetros quantas as observações de Y disponíveis** (imagine-se uma recta de regressão ajustada com apenas 2 observações).

Modelo Nulo e modelo saturado (cont.)

Enquanto num Modelo Nulo tudo é variação residual, não explicada pelo modelo, num modelo saturado tudo é “explicado” pelo modelo, não havendo lugar a variação residual.

Num modelo saturado, o ajustamento é “perfeito”, mas inútil: a estimativa de cada valor esperado de Y coincide totalmente com o valor observado de Y correspondente, isto é, $\hat{\mu}_i = \widehat{E[Y_i]} = Y_i$.

Um tal ajustamento “perfeito” dos dados ao modelo saturado é ilusório. Mas é de utilidade como termo de comparação para medir o grau de ajustamento dum MLG a um conjunto de dados, medindo-se o afastamento em relação a este ajustamento “ideal”.

É nessa ideia que se baseia a definição do conceito de Desvio ou *Deviance*.

Desvio

Desvio (Deviance)

Considere-se um Modelo Linear Generalizado baseado em n observações independentes da variável resposta Y . Sejam:

- $\mathcal{L}_M$ a log-verosimilhança correspondente ao vector estimado $\vec{\beta}_M$ dos seus parâmetros (máxima com os dados observados);
- $\mathcal{L}_T$ a log-verosimilhança correspondente ao modelo saturado, isto é, a log-verosimilhança obtida substituindo cada valor esperado μ_i pela observação correspondente y_i .

Define-se o **desvio** como sendo:

$$D^* = -2(\mathcal{L}_M - \mathcal{L}_T)$$

Desvio (cont.)

Para uma distribuição da família exponencial de distribuições, tem-se:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right]$$

O desvio correspondente, indicando pelas letras M e T os estimadores associados ao parâmetro natural θ , e admitindo conhecido o parâmetro de dispersão ϕ , vem:

$$D^* = -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]}{a(\phi_i)} \right]$$

Desvio (cont.)

As expressões para os desvios são mais simples caso o parâmetro de dispersão seja uma constante conhecida, que não exige estimação. É o caso das distribuições de Poisson e Bernoulli ou Binomial/ n :

- $\phi = 1$ na Poisson e na Bernoulli;
- $\phi = \frac{1}{n}$ Binomial/ n .

Para distribuições bi-paramétricas da família exponencial em que o parâmetro ϕ não é conhecido, ϕ tem de ser estimado a partir dos dados para se poder calcular o desvio. Isso complica a situação.

Desvio numa Poisson

Vimos (slide 94) que se Y tem **distribuição de Poisson**:

$$\theta = \ln(\lambda) \quad ; \quad b(\theta) = e^\theta = \lambda \quad ; \quad \phi = a(\theta) = 1 .$$

No modelo saturado tem-se: $\hat{\lambda}_i^T = y_i$. No modelo ajustado, fica $\hat{\lambda}_i^M = \hat{\lambda}_i$.

Então a expressão geral do **desvio** (slide 105) será:

$$\begin{aligned} D^* &= -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \left[\ln(y_i) - \ln(\hat{\lambda}_i) \right] - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right\} \\ \Leftrightarrow D^* &= 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\lambda}_i} \right) - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right] \end{aligned}$$

Nota: A expressão para $\hat{\lambda}$ (logo, do Desvio) depende **também** da função de ligação usada.

Exemplo: Exercício 3 (cont.)

Dados Elisa1 (emergencias)

```
> Elisa1.glm <- glm(emergencias~esciarideos,family=poisson,data=Elisa1)
```

```
> summary(Elisa1.glm)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	2.632e+00	5.076e-02	51.85	<2e-16 ***
esciarideos	5.248e-04	3.209e-05	16.36	<2e-16 ***

--

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance:	513.00	on 56	degrees of freedom	<---
Residual deviance:	244.22	on 55	degrees of freedom	<---

AIC: 526.32

O **Desvio** do modelo é a **Residual Deviance** (244.22, no nosso caso).

O **Desvio do Modelo Nulo** é a **Null Deviance** (513.00, no nosso caso).

Comparação de modelos: Razão de verosimilhanças

Um teste à admissibilidade dum Submodelo é obtido com um resultado muito geral: o teste à razão de Verosimilhanças (Likelihood Ratio Test, ou LRT).

Seja $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ uma amostra aleatória. Seja $L(\vec{\theta}|\vec{Y})$ a sua verosimilhança, onde $\vec{\theta}$ designa um vector de parâmetros. Sejam Θ_0 e Θ_1 dois conjuntos alternativos de condições sobre os valores dos parâmetros θ .

No contexto dum Modelo Linear Generalizado com ϕ conhecido, os parâmetros θ são os $p+1$ coeficientes β_j da combinação linear que constitui a componente sistemática do Modelo.

Sejam:

- Θ_0 valores admissíveis com a restrição do submodelo: $H_0 : \vec{\beta}_{\overline{S}} = \vec{0}$.
- Θ_1 indica-se a condição complementar: $H_1 : \vec{\beta}_{\overline{S}} \neq \vec{0}$.
- $\Theta_0 \cup \Theta_1$ indica-se qualquer vector $\vec{\beta}_{\overline{S}}$, sem restrições.

Teorema de Wilks

Designa-se **razão de verosimilhanças** (likelihood ratio) a:

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\max_{\boldsymbol{\theta} \in (\Theta_0 \cup \Theta_1)} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}$$

O **Teorema de Wilks** garante que, sob H_0 (e com certas condições de regularidade da função de verosimilhança) $\Lambda = -2\ln(R_n)$ tem distribuição **assintótica** χ_q^2 , onde q indica o número de restrições impostas aos parâmetros em H_0 :

$$\Lambda = -2 \left(\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) - \max_{\boldsymbol{\theta} \in (\Theta_0 \cup \Theta_1)} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) \right) \sim \chi_q^2.$$

Assim, Λ pode ser utilizada como **estatística do teste** às hipóteses:

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1.$$

com **região crítica unilateral direita**.

Teste de Wilks a Submodelos

No contexto de comparação de modelos e submodelos num MLG,

- q é a diferença entre o número de parâmetros do modelo completo $(\Theta_0 \cup \Theta_1)$ e do submodelo (Θ_0) : $q = p - k$;
- o Desvio do modelo completo, $D_M^* = -2(\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T))$ é calculado com base na log-verosimilhança $\mathcal{L}(\hat{\theta}^M)$ correspondente às estimativas MV do Modelo Completo;
- o Desvio do submodelo, $D_S^* = -2(\mathcal{L}(\hat{\theta}^S) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T))$ é calculado com base na log-verosimilhança $\mathcal{L}(\hat{\theta}^S)$ correspondente às estimativas MV do Submodelo;
- A log-verosimilhança $\mathcal{L}(\hat{\theta}^T)$ do modelo saturado é igual nos dois casos (os valores esperados de Y são sempre estimados pelos valores observados);
- a estatística do teste é apenas a diferença dos desvios:

$$\Lambda = D_S^* - D_M^*$$

Teste de Wilks a Submodelos

A estatística do Teste de Wilks a modelos encaixados é a diferença dos Desvios de Modelo e Submodelo.

Teste de Wilk a Submodelos Encaixados

Hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_j = 0, \quad \forall j \notin S & \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j \notin S, \text{ t.q. } \beta_j \neq 0 \\ \Leftrightarrow H_0 : \vec{\beta}_{\bar{S}} = \vec{0} & \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vec{\beta}_{\bar{S}} \neq \vec{0} \\ \text{[Submodelo OK]} & \quad \text{vs.} \quad \text{[Modelo melhor]} \end{aligned}$$

Estatística do Teste: $\Lambda = D_S^* - D_M^* \sim \chi_{p-k}^2$,

Região Crítica: Unilateral direita **Rejeitar H_0 se $\Lambda_{calc} > \chi_{\alpha; (p-k)}^2$.**

Nota: No caso do parâmetro de dispersão ϕ não ser conhecido, o cálculo de D^* (que envolve ϕ) fica condicionado. São necessários testes alternativos, ou trabalhar apenas com resultados aproximados, usando uma estimativa de ϕ . O problema não existe para respostas Binomiais ou Poisson.

Teste de Wilks ao Ajustamento Global

Para MLGs cuja componente sistemática inclui uma parcela aditiva constante, o conceito de ajustamento global do Modelo pode ser semelhante ao usado no estudo do Modelo Linear: compare-se o ajustamento do Modelo e do Submodelo Nulo, que se obtém sem qualquer variável preditora (apenas com a constante).

No Submodelo Nulo tem-se:

$$g(E[Y_i]) = \beta_0 \quad \Longleftrightarrow \quad E[Y_i] = g^{-1}(\beta_0), \quad \forall i = 1 : n.$$

Ou seja, $E[Y]$ é constante.

Se o Modelo sob estudo não se ajustar de forma significativamente melhor que esse Submodelo Nulo, conclui-se pela inutilidade do Modelo.

Teste de Wilks ao Ajustamento Global (cont.)

Para modelos em que não seja necessário estimar o parâmetro de dispersão ϕ , tem-se:

Teste de Wilk ao Ajustamento de um MLG

Hipóteses:

$$\begin{array}{ll} H_0 : \beta_j = 0, & \forall j = 1 : p \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j = 1 : p, \text{ t.q. } \beta_j \neq 0 \\ \text{[Modelo inútil]} & \text{vs.} \quad \text{[Melhor que Modelo Nulo]} \end{array}$$

Estatística do Teste: $\Lambda = D_N^* - D_M^* \sim \chi_p^2,$

Região Crítica: Unilateral direita. Rejeitar H_0 se $\Lambda_{calc} > \chi_{\alpha;p}^2.$

D_N^* indica o Desvio do Modelo Nulo.

Exemplo: Exercício 3

Dados Elisa1 (emergencias)

Para testar a significância do ganho no desvio (face ao Modelo Nulo), recorre-se ao teste de Wilks.

No R, o teste de Wilks comparando um modelo GLM com o modelo nulo correspondente, pode ser feito aplicando o comando `anova` ao modelo ajustado, com o argumento `test="Chisq"`.

```
> anova(Elisa1.glm, test="Chisq")
```

```
Analysis of Deviance Table
Model: poisson, link: log
Response: emergencias
```

	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	Pr(>Chi)
NULL			56	513.00	
esciarideos 1	268.78	55	244.22	< 2.2e-16 ***	

O modelo ajusta-se significativamente melhor do que o Modelo Nulo.

Desvio na Bernoulli

Vimos (slide 17) que se Y tem **distribuição Bernoulli**:

$$\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad ; \quad b(\theta) = \ln(1 + e^\theta) = -\ln(1-p) \quad ; \quad \phi = a(\theta) = 1 .$$

No modelo ajustado, fica $\hat{p}_i^M = \hat{p}_i$. No modelo saturado ter-se-ia: $\hat{p}_i^T = y_i$. Mas como y_i só toma valores 0 e 1, as expressões de θ e $b(\theta)$ não estariam bem definidas num modelo saturado.

Assim, no caso do MLGs com resposta Bernoulli, o Desvio define-se apenas como -2 vezes a log-verosimilhança:

$$\begin{aligned} D^* &= -2\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i \hat{\theta}_i^M - b(\hat{\theta}_i^M) \right] \\ &= -2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \ln\left(\frac{\hat{p}_i}{1-\hat{p}_i}\right) + \ln(1-\hat{p}_i) \right\} \\ \Leftrightarrow D^* &= -2 \sum_{i=1}^n \{ y_i \ln(\hat{p}_i) + (1-y_i) \ln(1-\hat{p}_i) \} \end{aligned}$$

Desvio na Binomial/n

Vimos (slide 32) que se Y tem **distribuição 'Binomial/n'**:

$$\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad ; \quad b(\theta) = -\ln(1-p) \quad ; \quad \phi = \frac{1}{n} \quad ; \quad a(\phi) = \frac{1}{n} .$$

No modelo saturado tem-se: $\hat{p}_i^T = y_i$. No modelo ajustado, fica $\hat{p}_i^M = \hat{p}_i$.

Substituindo a expressão geral do Desvio (acetato 105), fica^(*):

$$\begin{aligned} D^* &= -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]]}{a(\phi_i)} \\ \Leftrightarrow D^* &= 2 \sum_{i=1}^n n_i \left\{ y_i \ln\left(\frac{y_i}{\hat{p}_i}\right) + (1-y_i) \ln\left(\frac{1-y_i}{1-\hat{p}_i}\right) \right\} \end{aligned}$$

A expressão do Desvio **difere** na Bernoulli e Binomial/n.

A expressão de $\hat{p}$ (logo, do Desvio) depende **também** da função de ligação.

(*) No caso de observações $y_i = 0$ ou $y_i = 1$, as parcelas correspondentes ficarão do tipo da Bernoulli, com n_i :

$$-2n_i \cdot \{y_i \ln(\hat{p}_i) + (1-y_i) \ln(1-\hat{p}_i)\}$$

Exercício 1: teste de ajustamento global no

Exemplo: larva do tabaco

```
> tabaco.glm <- glm(cbind(morte,20-morte) ~ log(dose,2),  
+                   family=binomial(link=probit), data=tabaco)  
> anova(tabaco.glm, test="Chisq")
```

```
Analysis of Deviance Table  
Model: binomial, link: probit  
Response: cbind(morte, 20 - morte)  
Terms added sequentially (first to last)  
      Df Deviance Resid. Df Resid. Dev  Pr(>Chi)  
NULL                                     11    124.876  
log(dose, 2)  1    108.46           10    16.414 < 2.2e-16 ***
```

Como previsível, o modelo ajusta-se significativamente melhor do que um modelo nulo, que estima uma probabilidade constante p , para qualquer dose.

Intervalos de confiança através de *profiling*

O teste de Wilks (**LRT**) também serve para construir ICs para os parâmetros β_j (ver slide 86).

A partir dos valores estimados (de MV) para p parâmetros β_j ($j \neq k$), impõe-se uma restrição ($q = 1$) ao restante parâmetro: $\beta_k = c$. **Caso a estatística de Wilks correspondente não exceda o limiar $\chi^2_{1,1-\alpha}$, esse valor imposto a β_k é admissível, e pertencerá ao intervalo a $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para β_k .**

Seja Θ_0 a condição $\beta_k = c$. Sabemos, pelo Teorema de Wilks, que:

$$\Lambda = -2 \left(\max_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) - \max_{\theta \in (\Theta_0 \cup \Theta_1)} \mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) \right) \sim \chi^2_1.$$

Se

$$\Lambda_{calc} = -2 \left(\max_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) - \max_{\theta \in (\Theta_0 \cup \Theta_1)} \mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) \right) < \chi^2_{1,1-\alpha}$$

então o valor c pertence ao intervalo a $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para β_k .

Percorrendo, à vez, ciclos de diferentes valores de cada parâmetro β_j , obtêm-se os **intervalos de confiança de perfis** para cada parâmetro.

Seleção de Submodelos

Tal como no Modelo Linear, a escolha dum submodelo adequado pode ser determinado por considerações de diversa ordem.

Caso não haja um submodelo proposto, a pesquisa completa dos $2^p - 2$ possíveis submodelos coloca as mesmas dificuldades computacionais já consideradas no estudo do Modelo Linear.

A função `leaps` do módulo R `subselect` permite efectuar pesquisas completas para submodelos MLG óptimos duma dada cardinalidade (desde que o número de preditores não seja muito grande).

Alternativamente, é possível usar algoritmos de exclusão ou inclusão sequenciais, semelhantes aos usados no Modelo Linear, mas adoptando como critério para a inclusão/exclusão de variáveis a maior/menor redução (significativa) que geram no Desvio ou AIC.

O AIC em GLMs

Critério de Informação de Akaike (AIC)

O AIC define-se, num MLG com m parâmetros, estimados por $\vec{\hat{\beta}}$, como:

$$AIC = -2 \cdot \mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}}; \vec{Y}) + 2m.$$

sendo $\mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}}; \vec{Y})$ a log-verossimilhança da amostra.

- Quanto menor o valor do AIC (para igual variável resposta $\vec{Y}$), melhor o ajustamento do modelo.
- O AIC pode ser usado como critério de comparação de modelos com a mesma amostra e componente aleatória.
- Note-se que em MLGs, quer o desvio $D^* = -2(\mathcal{L}_M - \mathcal{L}_T)$, quer o AIC, são definidos à custa da log-verossimilhança.

Modelos com variável resposta Gama

A distribuição Gama

A Gama é uma distribuição de variáveis aleatórias **contínuas** tomando valores em $\mathbb{R}^+$. A **parametrização usual em MLGs** (ver Exercício 6) é:

$$f(y \mid \mu, \nu) = \frac{\nu^\nu}{\mu^\nu \Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{-\frac{\nu y}{\mu}}$$

Casos particulares: a distribuição **Qui-quadrado** (χ_n^2 se $\nu = \frac{n}{2}$ e $\mu = n$) e a distribuição **Exponencial** ($\nu = 1$).

Se $Y \sim G(\mu, \nu)$, a variância é proporcional ao quadrado da média:

$$E[Y] = \mu \quad \text{e} \quad V[Y] = \frac{\mu^2}{\nu}$$

MLGs com componente aleatória Gama podem ser úteis quando a variância dos dados não é constante, mas proporcional ao quadrado da média.

A distribuição Gama na família exponencial

Uma variável aleatória Y tem distribuição **Gama** com parâmetros μ e v se toma valores em $\mathbb{R}^+$, com função densidade da forma:

$$f(y \mid \mu, v) = \frac{v^v}{\mu^v \Gamma(v)} y^{v-1} e^{-\frac{vy}{\mu}} = e^{\frac{(-\frac{1}{\mu})y + \ln(\frac{1}{\mu})}{\frac{1}{v}} + v \ln v - \ln \Gamma(v) + (v-1) \ln y}$$

A Gama é da família exponencial, $f(y \mid \theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$, com:

- $\theta = -\frac{1}{\mu}$
- $\phi = \frac{1}{v}$
- $b(\theta) = -\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\ln(-\theta)$
- $a(\phi) = \phi = \frac{1}{v}$
- $c(y, \phi) = v \ln v - \ln \Gamma(v) + (v-1) \ln y$

Funções de ligação e ligação canónica na Gama

Uma vez que para $Y \sim G(\mu, \nu)$ se verifica $E[Y] = \mu$, as funções de ligação g num MLG com variável resposta Gama relacionam a média μ com as combinações lineares das variáveis preditoras:

$$g(\mu) = \vec{x}^t \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$$

A **função de ligação canónica** para modelos com distribuição Gama transforma o valor esperado de Y no parâmetro natural $\theta = -\frac{1}{\mu}$.

Como o sinal negativo apenas afecta o sinal dos β_j s, é hábito definir a função de ligação canónica para modelos com variável resposta Gama apenas como a **função recíproco**:

$$g(\mu) = \frac{1}{\mu}$$

Modelo Gama com ligação canónica

O modelo fica completo equacionando a parte sistemática a esta transformação canónica do valor esperado de Y :

$$g(\mu) = \frac{1}{\mu} = \vec{x}^t \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\vec{x}} = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = \frac{1}{\vec{x}^t \vec{\beta}}$$

Embora o valor esperado da variável resposta Y tenha de ser positivo (uma variável Y com distribuição Gama só toma valores positivos), na relação acima o valor esperado μ pode ser negativo.

Assim, e ao contrário de modelos anteriores, **não existe uma “garantia estrutural” de que os valores de μ estimados façam sentido.**

Curvas conhecidas em contexto MLG

No caso particular de haver uma única variável preditora numérica, a relação obtida diz que o valor médio de Y é dado por uma curva de tipo hiperbólico,

$$E[Y] = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x}.$$

Esta função tem sido usada em Agronomia para modelar curvas de rendimento por planta (Y), em função da densidade da cultura (X).

Caso se opte por trabalhar com os recíprocos dum único preditor, ou seja com a transformação $X^* = \frac{1}{X}$, o valor esperado fica

$$E[Y] = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1/x} = \frac{x}{x\beta_0 + \beta_1},$$

pelo que o valor esperado de Y será dado pela curva de Michaelis-Menten (com a parametrização de Shinozaki-Kira).

Quadro-resumo da família exponencial

Distribuição	$E[Y]$	$V[Y]$	θ	$b(\theta)$	ϕ	$a(\phi)$
Normal	μ	σ^2	μ	$\frac{\theta^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}$	σ^2	σ^2
Poisson	λ	λ	$\ln(\lambda)$	$e^\theta = \lambda$	1	1
Bernoulli	p	$p(1-p)$	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$\ln(1 + e^\theta) = -\ln(1-p)$	1	1
Binomial/n	p	$\frac{p(1-p)}{n}$	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$\ln(1 + e^\theta) = -\ln(1-p)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$
Gama	μ	$\frac{\mu^2}{v}$	$-\frac{1}{\mu}$	$-\ln(-\theta) = -\ln\left(\frac{1}{\mu}\right)$	$\frac{1}{v}$	$\frac{1}{v}$

Em todos estes casos, tem-se $a(\phi) = \phi$.

O parâmetro de dispersão ϕ desconhecido

Em GLMs com variável resposta Poisson ou Bernoulli, o parâmetro de dispersão é conhecido: $\phi = 1$. Na Binomial/ n também é conhecido.

Mas em GLMs com componente aleatória de distribuição Gama, ou Normal, o parâmetro de dispersão é, em geral, desconhecido:

- Numa Normal, $\phi = \sigma^2$ (a variância);
- Numa Gama com a parametrização $Y \sim G(\mu, \nu)$, $\phi = \frac{1}{\nu}$ (com variância $V[Y] = \mu^2 \phi$).

O desconhecimento de ϕ exige estimação e cria problemas.

É frequente admitir que ϕ é comum a todas as observações, ou que varia entre observações apenas devido a constantes conhecidas. Admitir ϕ_i 's arbitrariamente diferentes impede a sua estimação, por falta de informação.

Desvio e desvio reduzido

Sendo necessário estimar ϕ , define-se o **desvio reduzido** (scaled deviance).

Desvio e desvio reduzido

Admitindo que $a(\phi_i) = \frac{\phi}{w_i}$, para ϕ comum a todas as observações e pesos w_i conhecidos, o desvio fica:

$$D^* = -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\phi} \left\{ y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right\}$$

É usual chamar a D^* o **desvio reduzido** (scaled deviance) e reservar a expressão **desvio** (deviance) para D , definido tal que:

$$D^* = \frac{D}{\phi}, \quad \Leftrightarrow \quad D = 2 \sum_{i=1}^n w_i \left\{ y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right\}$$

NOTA: Na Poisson e Bernoulli, desvio e desvio reduzido coincidem, pois $\phi = 1$.

Desvio e desvio reduzido na Normal

Vimos (slide 16) que se Y tem **distribuição Normal**:

$$\theta = \mu \quad ; \quad b(\theta) = \frac{\theta^2}{2} = \frac{\mu^2}{2} \quad ; \quad \phi = \sigma^2 \quad ; \quad a(\phi) = \phi = \sigma^2 .$$

No modelo saturado tem-se: $\hat{\mu}_i^T = y_i$. No modelo ajustado, fica $\hat{\mu}_i^M = \hat{\mu}_i$.

Substituindo na expressão geral do Desvio (slide 105):

$$\begin{aligned} D^* &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right]}{a(\phi_i)} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left[y_i(y_i - \hat{\mu}_i) - \frac{y_i^2}{2} + \frac{\hat{\mu}_i^2}{2} \right]}{\sigma_i^2} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left[\frac{y_i^2}{2} - y_i \hat{\mu}_i + \frac{\hat{\mu}_i^2}{2} \right]}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\sigma_i^2} . \end{aligned}$$

Com a hipótese de variâncias homogêneas do Modelo Linear, $\sigma_i^2 = \sigma^2 = \phi$ para todo o i , o **desvio** da Normal é a Soma de Quadrados Residual:

$$D = \phi \cdot D^* = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2 = \text{SQRE} ,$$

Desvio e desvio reduzido na Gama

Tem-se, a partir do slide 123:

$$\theta = -\frac{1}{\mu} \quad ; \quad b(\theta) = -\ln(-\theta) = \ln(\mu) \quad ; \quad \phi = \frac{1}{v} \quad ; \quad a(\phi) = \phi = \frac{1}{v} .$$

Logo, (slide 105) o desvio reduzido D^* vem:

$$\begin{aligned} D^* &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]]}{a(\phi_i)} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(-\frac{1}{y_i} + \frac{1}{\hat{\mu}_i}) - [\ln(y_i) - \ln(\hat{\mu}_i)]]}{\frac{1}{v_i}} = 2 \sum_{i=1}^n v_i \left[\left(\frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} \right) - \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right] \end{aligned}$$

Admitindo que $a(\phi_i) = \phi = \frac{1}{v}$ (constante para todas as observações), o desvio D (slide 129) vem:

$$D = \phi \cdot D^* = 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} - \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right]$$

Estimação do parâmetro de dispersão ϕ

A estimação do parâmetro de dispersão ϕ exige que se admita que é comum a todas as observações ou, quanto muito, que varia apenas devido a constantes conhecidas.

Uma forma de estimar ϕ envolve o seu estimador de máxima verosimilhança. Mas a forma mais usual de estimar ϕ envolve um tipo de resíduos, chamados resíduos de Pearson, que veremos adiante.

Mesmo em modelos de resposta Binomial ou Poisson, onde $\phi = 1$, esta estimativa da dispersão pode ser útil: um valor de $\hat{\phi}$ muito superior a 1 sugere a existência de **sobredispersão**, aconselhando modificações ao modelo. No R, essa estimativa pode ser obtida usando a opção **quasi** na definição da **family** associada ao MLG.

Resíduos e Validação do Modelo

O conceito usual de resíduos no Modelo Linear, $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\mu}_i$, tem diferentes **adaptações nos MLGs**, onde, diversamente do que acontecia nos Modelos Lineares, **não se contempla a existência de erros aleatórios aditivos**.

Em Modelos Lineares Generalizados utilizam-se diversos conceitos de **resíduos**, sendo os principais os

- **resíduos usuais** (**response residuals**): $y_i - \hat{\mu}_i$;
- **resíduos do desvio**; e os
- **resíduos de Pearson**.

Resíduos do Desvio

Os **resíduos do Desvio** baseiam-se nas parcelas da definição do Desvio dum MLG (ou seja, na contribuição para o Desvio de cada observação).

Resíduos do Desvio

Seja $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ uma amostra aleatória da Componente Aleatória dum Modelo Linear Generalizado. Seja

$$D = \sum_{i=1}^n d_i$$

o seu Desvio. Designa-se **resíduo do Desvio** da observação i a:

$$r_i^D = \text{sinal}(y_i - \hat{\mu}_i) \cdot \sqrt{d_i}$$

Resíduos do desvio (cont.)

Concretizando:

- **Normal:** Tem-se $d_i = (y_i - \hat{\mu}_i)^2$. O resíduo do Desvio vem:

$$r_i^D = y_i - \hat{\mu}_i$$

Os resíduos do Desvio são os resíduos usuais do Modelo Linear.

- **Bernoulli:** tem-se

$$d_i = -2 \cdot [y_i \ln(\hat{p}_i) + (1 - y_i) \ln(1 - \hat{p}_i)] = \begin{cases} -2 \ln(1 - \hat{p}_i) & \text{se } y_i = 0 \\ -2 \ln(\hat{p}_i) & \text{se } y_i = 1 \end{cases}$$

Os resíduos do Desvio para Y Bernoulli são:

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{p}_i) \cdot \sqrt{d_i} = \begin{cases} -\sqrt{-2 \ln(1 - \hat{p}_i)} & \text{se } y_i = 0 \\ \sqrt{-2 \ln(\hat{p}_i)} & \text{se } y_i = 1 \end{cases}$$

Resíduos do Desvio (cont.)

- **Binomial/n:** tem-se

$$d_i = \begin{cases} 2n_i \left[y_i \ln \left(\frac{y_i}{\hat{p}_i} \right) + (1 - y_i) \ln \left(\frac{1 - y_i}{1 - \hat{p}_i} \right) \right] & \text{se } y_i \neq 0, 1 \\ -2n_i [y_i \ln(\hat{p}_i) + (1 - y_i) \ln(1 - \hat{p}_i)] & \text{se } y_i \in \{0, 1\} . \end{cases}$$

Os resíduos do Desvio para Y Binomial/n são:

$$r_i^D = \begin{cases} \frac{\text{sinal}(y_i - \hat{p}_i) \cdot \sqrt{2n_i \left[y_i \ln \left(\frac{y_i}{\hat{p}_i} \right) + (1 - y_i) \ln \left(\frac{1 - y_i}{1 - \hat{p}_i} \right) \right]}}{\sqrt{-2n_i \ln(\hat{p}_i)}} & \text{se } y_i \neq 0, 1 \\ -\sqrt{-2n_i \ln(\hat{p}_i)} & \text{se } y_i = 1 . \\ -\sqrt{-2n_i \ln(1 - \hat{p}_i)} & \text{se } y_i = 0 . \end{cases}$$

- **Poisson:** Neste caso $d_i = 2 \cdot \left[y_i \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\lambda}_i} \right) - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right]$. Os resíduos do Desvio para Y Poisson são:

$$r_i^D = \text{sinal}(y_i - \hat{\lambda}_i) \cdot \sqrt{2 \left[y_i \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\lambda}_i} \right) - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right]}$$

Resíduos do Desvio (cont.)

- **Gama:** neste caso

$$d_i = 2 \cdot \left[\frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} - \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right]$$

Os resíduos do Desvio para Y Gama são:

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{\mu}_i) \cdot \sqrt{2 \cdot \left[\frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} - \ln \left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right]}$$

A cada diferente função de ligação g corresponde uma diferente forma de obter as médias ajustadas $\hat{\mu}$, logo uma diferente expressão concreta para os resíduos do Desvio.

Resíduos de Pearson

A ideia subjacente aos **resíduos de Pearson** é a de relativizar os resíduos usuais, dividindo por uma medida da variabilidade das observações.

O ideal seria dividir as diferenças entre valores observados de Y_i e correspondentes estimativas dos seus valores esperados, $\widehat{E[Y_i]} = \hat{\mu}_i$, pelo desvio padrão associado aos Y_i .

Quando a variância de Y depende do parâmetro de dispersão ϕ , e sobretudo quando este é desconhecido, é hábito substituir a variância pela chamada **função de variância** do modelo, que não depende de ϕ , mas apenas de θ (e portanto da média $\mu = E[Y]$).

Função de Variância

Função de Variância

Dado um MLG com componente aleatória Y de média $E[Y]$, variância $V[Y]$, parâmetro de dispersão ϕ e respectiva função $a(\phi)$. Designa-se **função de variância** do modelo à função:

$$f_v(E[Y]) = \frac{V[Y]}{a(\phi)}$$

Tem-se: $V[Y] = a(\phi) \cdot f_v(E[Y])$.

Pelas fórmulas do slide 15, tem-se que a **função de variância** é dada por:

$$f_v(E[Y]) = b''(\theta).$$

Função de Variância (cont.)

A função de variância é diferente para cada distribuição de Y :

- **Normal:** Tem-se $f_v(\mu) = \frac{V[Y]}{a(\phi)} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$.
- **Bernoulli:** $f_v(p) = \frac{V[Y]}{a(\phi)} = \frac{V[Y]}{1} = p(1 - p)$.
- **Binomial/n:** $f_v(p) = \frac{V[Y]}{a(\phi)} = \frac{\frac{p(1-p)}{n}}{\frac{1}{n}} = p(1 - p)$.
- **Poisson:** Tem-se $f_v(\lambda) = \frac{V[Y]}{a(\phi)} = \frac{V[Y]}{1} = \lambda$.
- **Gama:** Tem-se $f_v(\mu) = \frac{V[Y]}{a(\phi)} = \frac{\frac{\mu^2}{v}}{\frac{1}{v}} = \mu^2$.

Resíduos de Pearson

Resíduos de Pearson

Seja $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ uma amostra aleatória da componente aleatória dum Modelo Linear Generalizado. Designa-se **resíduo de Pearson** de cada observação a:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{f_v(\hat{\mu}_i)}}.$$

- **Normal:** Tem-se $f_v(\mu_i) = 1$. O resíduo de Pearson é o **habitual resíduo** do Modelo Linear:

$$r_i^P = Y_i - \hat{\mu}_i$$

- **Poisson:** Tem-se $f_v(\lambda_i) = \lambda_i$. O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\lambda}_i}{\sqrt{\hat{\lambda}_i}}$$

Resíduos de Pearson (cont.)

- **Bernoulli:** $f_v(p_i) = p_i(1 - p_i)$. O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{p}_i}{\sqrt{\hat{p}_i(1 - \hat{p}_i)}}$$

- **Gama:** Tem-se $f_v(\mu_i) = \mu_i^2$. O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i}$$

O caso da Binomial/ n é exceção. Uma vez que $a(\phi) = \frac{1}{n}$ é conhecida, é habitual dividir o resíduo usual pelo desvio padrão de Y_i :

- **Binomial/ n :** O resíduo de Pearson define-se como:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{p}_i}{\sqrt{V[Y_i]}} = \frac{Y_i - \hat{p}_i}{\sqrt{\frac{\hat{p}_i(1 - \hat{p}_i)}{n_i}}}$$

Resíduos de Pearson (cont.)

As expressões dos resíduos de Pearson **dependem também das funções de ligação**. Por exemplo, em modelos de resposta dicotómica, nas fórmulas (142) e (142) do acetato 142 tem-se,

- numa **Regressão Logística**:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)})}}$$

- Numa **Regressão Probit**:

$$\hat{p}_i = \Phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)})$$

- Num **modelo Log-log do complementar**:

$$\hat{p}_i = 1 - e^{-e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)}}}$$

Estatística de Pearson generalizada

No slide 141 viu-se que, para MLGs com componente aleatória Poisson, o resíduo de Pearson é $r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\lambda}_i}{\sqrt{\hat{\lambda}_i}}$. Como nesses modelos $\hat{\lambda}_i = \widehat{E[Y_i]}$, a soma de quadrados desses resíduos é a habitual estatística de Pearson dos testes Qui-quadrado, $\sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$. Essa relação dá origem ao seguinte conceito.

Estatística de Pearson generalizada, X^2

Dado um MLG com resíduos de Pearson r_i^P chama-se **Estatística de Pearson generalizada** à soma de quadrados desses resíduos:

$$X^2 = \sum_{i=1}^n (r_i^P)^2.$$

Por vezes, este valor é usado em alternativa ao desvio, como indicador da qualidade de ajustamento do modelo.

Estimação do parâmetro de dispersão ϕ

Em MLGs com parâmetro de dispersão ϕ desconhecido, uma das formas usada para estimar ϕ baseia-se nos resíduos de Pearson.

Estimador de ϕ

Num MLG com m parâmetros na componente sistemática e admitindo parâmetro de dispersão ϕ comum a todas as observações Y_i , um estimador de ϕ é dado por:

$$\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i^P)^2}{n-m}.$$

Nota: No caso particular do Modelo Linear este estimador é o *QMRE*.

Os Resíduos no

Tal como no modelo linear, o R disponibiliza funções para o cálculo dos resíduos e dos resíduos normalizados.

- `residuals` calcula resíduos. Por omissão, calcula resíduos do desvio.

```
> residuals(tabaco.glm)
      1          2          3          4          5          6
-0.003720807  0.631866326  1.149311810  0.834445925  1.498556259  1.944020824
      7          8          9         10         11         12
-1.435052677 -0.632286846 -0.253437946 -0.523178851 -1.708321246 -1.502372783
```

- Podem obter-se os **resíduos de Pearson** explicitando a opção `type="pearson"`.

```
> residuals(tabaco.glm, type="pearson")
      1          2          3          4          5          6
-0.00371868  0.65977673  1.17907319  0.82587899  1.37017323  1.40774747
      7          8          9         10         11         12
-1.02793742 -0.60081763 -0.25159052 -0.52497400 -1.82437610 -1.71522073
```

Os Resíduos na Validação de um MLG

Os resíduos podem ser utilizados para:

- estudar a validade da hipótese distribucional associada à sua componente aleatória;
- estudar a adequação da componente sistemática como preditor linear;
- estudar a adequação da função de ligação escolhida;
- como diagnósticos na procura de observações com particularidades especiais.

A utilização dos resíduos tem muitas especificidades para cada MLG concreto, sendo difícil uma discussão conjunta.

Para uma discussão mais aprofundada, sugere-se a consulta da bibliografia.

O estudo dos resíduos (cont.)

São frequentes as seguintes inspecções gráficas:

1) **Resíduos contra transformações das esperanças estimadas**: é o gráfico correspondente ao gráfico de resíduos vs. valores ajustados no Modelo Linear. Em MLGs, estas transformações diferem consoante a distribuição dos Y_i , na tentativa de fazer com que os gráficos tenham uma leitura semelhante à que se fazia no Modelo Linear.

As transformações sugeridas por McCullagh & Nelder (1989) são:

- $\hat{\mu}$ (identidade) para Y Normal de média μ ;
- $2\sqrt{\hat{\lambda}}$ para Y Poisson de média λ ;
- $2\arcsin(\hat{p})$ para Y Bernoulli de média p .
- $2\ln \hat{\mu}$ para Y Gama de média μ .

O estudo dos resíduos (cont.)

Curvaturas em gráficos deste tipo sugerem a possibilidade de escolha errada de função de ligação ou a necessidade de transformação de uma ou mais variáveis preditoras.

McCullagh & Nelder sugerem a utilização de resíduos do desvio standardizados neste tipo de gráficos.

2) resíduos contra cada variável preditora: trata-se dum tipo de gráfico que também pode ser usado nos Modelos Lineares, para sugerir transformações de algum(ns) preditor(es).

Um padrão evidente neste gráfico indicia ou uma função de ligação errada, ou a necessidade duma transformação do preditor.

O estudo dos resíduos (cont.)

3) **resíduos contra ordem de observação ou distribuição espacial das observações**: caso faça sentido, este tipo de gráfico pode indicar a presença de correlação entre observações que se desejam independentes.

4) **módulo dos resíduos contra os valores ajustados de $\hat{\mu}$** : é útil para estudar se a função de variância admitida é plausível, em cujo caso os pontos devem dispersar-se numa banda horizontal.

Modelos tipo ANCOVA em MLGs

Modelos de tipo ANCOVA misturam preditores quantitativos e factores.

Vamos ilustrar com um contexto específico:

- modelos tipo ANCOVA que correspondem a modificar os parâmetros β_j dum MLG para cada nível de um factor (ver exemplo no Exercício 9);
- diferentes submodelos correspondem a admitir que alguns parâmetros são iguais em diferentes níveis do factor.

Exemplifica-se admitindo um MLG com um só preditor numérico e $k = 3$ níveis dum factor. Mas a abordagem é extensível a qualquer número de preditores numéricos e qualquer número $k \in \mathbb{N}$ de níveis.

A formulação do modelo

Admita-se um MLG entre uma componente aleatória Y e um preditor numérico x , com parâmetros β_j que **podem ser diferentes em cada um de 3 níveis dum factor**. Assim, a componente sistemática seria da forma:

- Contexto 1: $\beta_0 + \beta_1 x$
- Contexto 2: $\beta_0^* + \beta_1^* x$
- Contexto 3: $\beta_0^{**} + \beta_1^{**} x$

Considere-se o primeiro contexto como **nível de referência** e **escrevam-se os parâmetros dos contextos restantes à custa dos primeiros**:

$$\begin{aligned}\beta_0^* &= \beta_0 + \alpha_{0:2} & ; & & \beta_1^* &= \beta_1 + \alpha_{1:2} \\ \beta_0^{**} &= \beta_0 + \alpha_{0:3} & ; & & \beta_1^{**} &= \beta_1 + \alpha_{1:3}\end{aligned}$$

Com os parâmetros escritos desta forma, **a hipótese de que há um mesmo modelo MLG nos três níveis do factor é a hipótese**

$$\alpha_{0:2} = \alpha_{0:3} = \alpha_{1:2} = \alpha_{1:3} = 0 .$$

A formulação do modelo (cont.)

Ajusta-se o modelo com n_i observações em cada nível ($i = 1, 2, 3$). Como na ANOVA a um factor, use-se a **dupla indexação** para identificar os níveis de origem: Y_{ij} e x_{ij} .

Tomem-se as **variáveis indicatrizes** $\vec{\mathcal{J}}_i$ de pertença aos níveis.

Definam-se ainda **vectores com os valores do preditor x num dado nível i ($i > 1$) e zero noutras posições**, representados por $\vec{x} \circ \vec{\mathcal{J}}_i$.

Num exemplo com $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ e $n_3 = 2$ observações, tem-se:

$$\vec{\mathcal{J}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} \circ \vec{\mathcal{J}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{23} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{J}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} \circ \vec{\mathcal{J}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix}$$

A equação do modelo ANCOVA

Podemos agora escrever a equação do modelo MLG da seguinte forma:

$$g(E[\vec{Y}]) = \beta_0 \mathbf{1}_n + \beta_1 \vec{\mathbf{x}} + \alpha_{0:2} \vec{\mathcal{J}}_2 + \alpha_{0:3} \vec{\mathcal{J}}_3 + \alpha_{1:2} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_2) + \alpha_{1:3} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_3)$$

O modelo ajusta, às observações de cada um dos três contextos, as seguintes relações:

$$g(E[Y_{ij}]) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 x_{1j}, & \text{se } i = 1 \\ (\beta_0 + \alpha_{0:2}) + (\beta_1 + \alpha_{1:2}) x_{2j}, & \text{se } i = 2 \\ (\beta_0 + \alpha_{0:3}) + (\beta_1 + \alpha_{1:3}) x_{3j}, & \text{se } i = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Caso os parâmetros de acréscimo $\alpha_{i:j}$ sejam *todos* iguais a zero, tem-se um único modelo MLG para os três contextos.

Este modelo tem $3 \times 2 = 6$ parâmetros (e variáveis preditoras $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathcal{J}}_2, \vec{\mathcal{J}}_3, \vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_2, \vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_3$). Em geral, para k níveis do factor haverá $2k$ parâmetros.

Alguns submodelos interessantes

$$\beta_0 \mathbf{1}_n + \beta_1 \vec{\mathbf{x}} + \alpha_{0:2} \vec{\mathcal{J}}_2 + \alpha_{0:3} \vec{\mathcal{J}}_3 + \alpha_{1:2} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_2) + \alpha_{1:3} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_3)$$

- A hipótese **dum único MLG nos 3 contextos** é a hipótese $\alpha_{0:2} = \alpha_{0:3} = \alpha_{1:2} = \alpha_{1:3} = 0$.
- A hipótese de **os dois primeiros contextos terem o mesmo MLG** é a hipótese $\alpha_{0:2} = \alpha_{1:2} = 0$.
- A hipótese de **o segunda e terceiro contextos terem o mesmo MLG**, é a hipótese $\alpha_{0:3} = \alpha_{1:3}$ e $\alpha_{1:2} = 0$.

Estas hipóteses (ou outras análogas) podem ser testadas através de testes do Lambda de Wilks (LRT) já vistos no estudo geral de MLGs.

Exercício 9

Exemplo: larva do tabaco - modelo tipo ANCOVA

No R, modelos de tipo ANCOVA ajustam-se com fórmulas cruzando factor e preditores:

```
> tabaco.glmSx <- glm(cbind(morte,20-morte) ~ log(dose,2) * sexo ,  
+ family=binomial(link=probit), data=tabaco)  
> summary(tabaco.glmSx)
```

(...)

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)	
(Intercept)	-1.80072	0.29832	-6.036	1.58e-09	***
log(dose, 2)	0.54523	0.09138	5.966	2.43e-09	***
sexomacho	0.15479	0.41635	0.372	0.710	
log(dose, 2):sexomacho	0.19165	0.14259	1.344	0.179	

(...)

Null deviance: 124.876 on 11 degrees of freedom
Residual deviance: 3.768 on 8 degrees of freedom <-- o desvio baixou de 16.41 para 3.768
AIC: 41.878

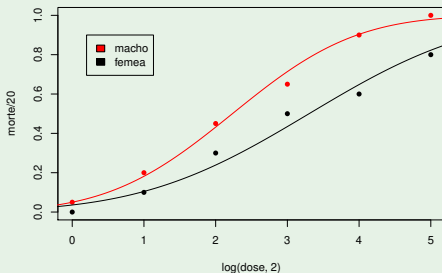
O nível de referência é fêmeas (ordem alfabética). As relações estimadas são:

- $p(x) = \Phi(-1.80072 + 0.54532 \log_2(x))$ nas fêmeas; e
- $p(x) = \Phi((-1.80072 + 0.15479) + (0.54532 + 0.19165) \log_2(x))$ nos machos.

Exercício 9 no (cont.)

Exemplo: larva do tabaco

```
> plot(morte/20 ~ log(dose,2), col=sexo, data=tabaco, pch=16)  
> curve(pnorm(-1.80072+0.54523*x), from=-1, to=6, add=TRUE)  
> curve(pnorm((-1.80072+0.15479)+(0.54523+0.19165)*x), from=-1, to=6,  
+       col="red", add=TRUE)  
> legend(0.2,0.9,legend=c("macho","femea"), fill=c("red","black"))
```

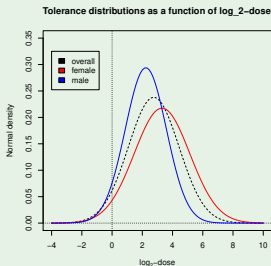


Interpretação toxicológica

Larva do tabaco

A distribuição da tolerância face à dosagem (slide 66), em logaritmos de base 2, pode agora ser calculada em separado para fêmeas e machos:

$$T_F \sim \mathcal{N}(3.30268, 3.36388) \quad ; \quad T_M \sim \mathcal{N}(2.233647, 1.84164).$$



A log-dosagem que mata metade das fêmeas (LD50) mata quase 80% dos machos:

```
> pnorm(3.30268 , m=2.233647 , sd=sqrt(1.84164))  
[1] 0.7845787
```

Exercício 9: teste de Wilks no

Para saber se há vantagem em considerar modelos diferentes para cada sexo, comparam-se os modelos, como pedido na alínea 9b), usando o teste de Wilks.

Exemplo: larva do tabaco

```
> anova(tabaco.glm, tabaco.glmSx, test="Chisq")
```

Analysis of Deviance Table

Model 1: cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2)

Model 2: cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) * sexo

	Resid. Df	Resid. Dev	Df	Deviance	P(> Chi)
1	10	16.414			
2	8	3.768	2	12.646	0.001795 **

O modelo com distinção por sexo é significativamente melhor (previsível pelo ajustamento gráfico).

Exclusão sequencial no R: Exercício 9

```
> step(tabaco.glmSx)
```

```
Start: AIC=41.88
```

```
cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) * sexo
```

	Df	Deviance	AIC
- log(dose, 2):sexo	1	5.566	41.676
<none>		3.768	41.878

<- Repare-se na hierarquia de tipos de efeitos. Num primeiro passo só considera efeitos de interacção.

```
Step: AIC=41.68
```

```
cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) + sexo
```

	Df	Deviance	AIC
<none>		5.566	41.676
- sexo	1	16.414	50.524
- log(dose, 2)	1	118.799	152.909

<- Tendo excluído a interacção, vai avaliar outros efeitos.

```
Call: glm(formula = cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) + sexo,  
family = binomial(link = "probit"), data = tabaco)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	log(dose, 2)	sexomacho
-2.0603	0.6324	0.6536

```
Degrees of Freedom: 11 Total (i.e. Null); 9 Residual
```

```
Null Deviance: 124.9
```

```
Residual Deviance: 5.566 AIC: 41.68
```

Opção final: modelo com β_1 igual nos dois sexos, mas β_0 diferente.

MLGs no estudo de tabelas de contingência

MLGs admitem variáveis preditoras quantitativas, qualitativas, ou de ambos os tipos.

Modelos Log-lineares são particularmente importantes no estudo de tabelas de contingência.

Trata-se de um contexto onde a componente aleatória corresponde a contagens (variável discreta), que se pretendem relacionar com os níveis de dois ou mais factores.

São frequentes os casos onde a variável resposta se pode considerar como tendo uma distribuição de Poisson (ou ainda binomial ou a sua generalização multinomial).

Tabelas de contingência para 2 factores

Consideremos o caso frequente de tabelas de contingência com dois factores de classificação.

Exemplo: uma tabela de contagens de observações de espécies (primeiro factor) em vários locais (segundo factor).

Níveis do Factor A	Níveis do Factor B					Marginal de A
	1	2	...	$b-1$	b	
1	n_{11}	n_{12}	...	$n_{1,(b-1)}$	$n_{1,b}$	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	...	$n_{2,(b-1)}$	$n_{2,b}$	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a-1$	$n_{(a-1),1}$	$n_{(a-1),2}$	...	$n_{(a-1),(b-1)}$	$n_{(a-1),b}$	$n_{(a-1).}$
a	n_{a1}	n_{a2}	...	$n_{a,(b-1)}$	$n_{a,b}$	$n_{a.}$
Marginal de B	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.(b-1)}$	$n_{.b}$	$n = n_{..}$

Tabelas de contingência para 2 factores (cont.)

Quando não há restrições sobre o número total de observações, ou sobre qualquer das margens (como será o caso nas tabelas de locais $\times$ espécies), as contagens podem ser consideradas como observações independentes de distribuições de Poisson.

Numa situação dessas, será de considerar um modelo semelhante aos modelos ANOVA, mas em que a variável resposta $Y_{ij} = n_{ij}$, tenha distribuição Poisson.

Neste contexto, um modelo tipo ANOVA factorial em que, além de efeitos principais de cada factor, se prevejam efeitos de interacção entre os dois factores, é um modelo saturado, uma vez que:

- há apenas 1 observação em cada uma das ab células (a contagem n_{ij});
- há ab parâmetros num modelo factorial com interacção.

A hipótese de independência

Mais útil serão modelos associados a **hipóteses mais restritivas** sobre a natureza da relação entre os factores associados à tabela. Em particular a **hipótese de independência** entre os factores pode ser interessante.

Existindo **independência entre os factores**, os valores esperados de $Y_{ij} = n_{ij}$ serão dados (para qualquer i e j) por:

$$E[Y_{ij}] = \lambda_{ij} = n p_{ij} = n p_{i.} p_{.j}$$

onde:

- n é o número total de observações;
- p_{ij} é a probabilidade duma observação recair na célula (i,j) ;
- $p_{i.}$ é a probabilidade marginal associada ao nível i do Factor A;
- $p_{.j}$ é a probabilidade marginal associada ao nível j do Factor B.

A hipótese de independência (cont.)

Uma vez que a **distribuição Poisson** é adequada à variável resposta, surge de forma natural a ideia de usar a função de **ligação canónica** para essa distribuição, ou seja, de **logaritmizar** $E[Y_{ij}]$:

$$\ln(E[Y_{ij}]) = \ln(n p_{i.} p_{.j}) = \ln(n) + \ln(p_{i.}) + \ln(p_{.j})$$

Trata-se duma relação do **tipo ANOVA a dois factores, sem interacção**:

$$\ln(E[Y_{ij}]) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

onde se pode considerar (embora mais tarde se modifique):

- $\mu = \ln(n)$ é uma constante comum a todas as observações;
- $\alpha_i = \ln(p_{i.})$ é um **efeito associado ao nível i do factor A**;
- $\beta_j = \ln(p_{.j})$ é um **efeito associado ao nível j do factor B**.

A hipótese de independência (cont.)

Estamos perante um **Modelo Log-linear** com:

- **componente aleatória Poisson**;
- **função de ligação logarítmica** (ligação canónica da Poisson);
- **componente sistemática** dada por **variáveis indicatrizes de níveis de cada factor**.

Tal como nas ANOVAs clássicas, impõem-se **restrições aos parâmetros** e considera-se a célula associada ao primeiro nível de cada factor como uma célula de referência, sendo a situação nas restantes células comparada com essa célula de referência.

As restrições aos parâmetros

Consideramos

$$\lambda_{11} = E[Y_{11}] = n \cdot p_{1.} \cdot p_{.1}$$

$$\lambda_{ij} = E[Y_{ij}] = n \cdot p_{i.} \cdot p_{.j} = \lambda_{11} \cdot \frac{p_{i.}}{p_{1.}} \cdot \frac{p_{.j}}{p_{.1}}, \quad \forall i = 1 : a, j = 1 : b$$

Logaritmizando, temos as relações:

$$\ln(\lambda_{ij}) = \ln(E[Y_{ij}]) = \underbrace{\ln(\lambda_{11})}_{=\mu} + \underbrace{\ln\left(\frac{p_{i.}}{p_{1.}}\right)}_{=\alpha_i} + \underbrace{\ln\left(\frac{p_{.j}}{p_{.1}}\right)}_{=\beta_j}, \quad \forall i, j$$

Assim surgem de forma natural as restrições $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 0$.

Um modelo log-linear a dois factores

O valor de n , o número total de observações, é conhecido.

Os **estimadores de máxima verosimilhança** dos parâmetros μ , α_i e β_j são dados pelas frequências relativas marginais:

$$\hat{p}_{i.} = \frac{n_{i.}}{n} \quad \text{e} \quad \hat{p}_{.j} = \frac{n_{.j}}{n},$$

pelo que

$$\hat{\mu} = \ln(n \cdot \hat{p}_{i.} \cdot \hat{p}_{.j}) = \ln\left(n \cdot \frac{n_{1.}}{n} \cdot \frac{n_{.1}}{n}\right) = \ln\left(\frac{n_{1.} \cdot n_{.1}}{n}\right)$$

$$\hat{\alpha}_i = \ln\left(\frac{\hat{p}_{i.}}{\hat{p}_{1.}}\right) = \ln\left(\frac{n_{i.}}{n_{1.}}\right)$$

$$\hat{\beta}_j = \ln\left(\frac{\hat{p}_{.j}}{\hat{p}_{.1}}\right) = \ln\left(\frac{n_{.j}}{n_{.1}}\right)$$

O Desvio mede afastamento da independência

Já se viu que saturar este modelo log-linear a dois factores corresponde a prever efeitos de interacção. Nesse modelo, cada célula é livre de ter o seu valor, sem qualquer estrutura especial associada à tabela.

O Desvio do modelo sem interacção

$$D^* = -2 \left(\mathcal{L}_M(\vec{\hat{\beta}}_M) - \mathcal{L}_T(\vec{\hat{\beta}}_T) \right)$$

corresponde ao valor da estatística de Wilks para uma comparação do submodelo (M) sem interacção (isto é, a hipótese de independência) face ao modelo saturado (T), com interacção (sem qualquer relação especial). Quanto menor D^* , mais os dados se comportam de acordo com a hipótese de independência. Pelo contrário, quanto maior D^* , menos plausível a hipótese de independência.

Exemplo: modelo para tabela de contingência

Dados HairEyeColor (para ambos os sexos)

Na *data frame* `cabelo.olho` há $n = 16$ contagens numa tabela cruzando 4 côres de cabelo e 4 côres de olhos, num grupo de $N = 592$ estudantes.

```
> cabelo.olho      | > cabeloOlho
contagens  cabelo  olhos |      Cabelo
1         68   preto castanhos | Olhos      preto  castanho  ruivo  louro
2        119 castanho castanhos |      castanhos  68      119    26    7
3         26    ruivo castanhos |      azuis      20      84    17   94
4          7    louro castanhos |      cinzentos  15      54    14   10
5         20   preto   azuis    |      verdes     5      29    14   16
6         84 castanho   azuis
7         17    ruivo   azuis
8         94    louro   azuis
9         15   preto cinzentos
10        54 castanho cinzentos
11        14    ruivo cinzentos
12        10    louro cinzentos
13         5     preto   verdes
14        29 castanho   verdes
15        14    ruivo   verdes
16        16    louro   verdes
```

Nota: Estes dados encontram-se na *data frame* `HairEyeColor` da distribuição base do R, e resultam de somar os valores relativos a ambos os sexos.

Exemplo (cont.)

```
> cabelo.glm <- glm(contagens ~ cabelo + olhos, family=poisson, data=cabelo.olho)
> summary(cabelo.glm)
```

```
Call: glm(formula = contagens ~ cabelo + olhos, family = poisson, data = cabelo.olho)
(...)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)	
(Intercept)	4.64312	0.08036	57.776	< 2e-16	***
cabelolouro	-0.81180	0.10663	-7.613	2.68e-14	***
cabelopreto	-0.97386	0.11294	-8.623	< 2e-16	***
cabeloruivo	-1.39331	0.13259	-10.508	< 2e-16	***
olhoscastanhos	0.02299	0.09590	0.240	0.811	
olhoscinzentos	-0.83804	0.12411	-6.752	1.46e-11	***
olhosverdes	-1.21175	0.14239	-8.510	< 2e-16	***

(...)

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 453.31 on 15 degrees of freedom
Residual deviance: 146.44 on 9 degrees of freedom
AIC: 241.04

Number of Fisher Scoring iterations: 5

Nota: Neste contexto, o **modelo ajustado** corresponde à **hipótese de independência**. O **modelo Nulo** corresponde a admitir que as contagens esperadas de todas as células são iguais, sendo estimadas por $\frac{N}{n} = \frac{592}{16} = 37$.

Exemplo (cont.)

O modelo log-linear de tipo ANOVA a 2 factores, mas **com** efeitos de interacção corresponde, como se viu, a um **modelo saturado**:

```
> cabelo.glmT <- glm(contagens ~ cabelo * olhos, family=poisson, data=cabelo.olho)
> summary(cabelo.glmT)
[...]
```

Deviance Residuals:

```
[1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[...]
```

Null deviance: 4.5331e+02 on 15 degrees of freedom
Residual deviance: 5.9952e-15 on 0 degrees of freedom
AIC: 112.6

O teste de Wilks comparando o modelo saturado e o modelo de independência avalia (e rejeita) a hipótese de independência:

```
> anova(cabelo.glm, cabelo.glmT, test="Chisq")
Analysis of Deviance Table
```

Model 1: contagens ~ cabelo + olhos
Model 2: contagens ~ cabelo * olhos

	Resid. Df	Resid. Dev	Df	Deviance	Pr(>Chi)
1	9	146.44			
2	0	0.00	9	146.44	< 2.2e-16 ***

Exemplo (cont.)

Por definição, o desvio é a soma dos quadrados dos resíduos do desvio.

```
> sum(residuals(cabelo.glm)^2)
```

```
[1] 146.4436
```

A soma dos quadrados dos resíduos de Pearson tem um valor próximo.

```
> sum(residuals(cabelo.glm, type="pearson")^2)
```

```
[1] 138.2898
```

Esta última soma de quadrados é também o valor da usual estatística do teste χ^2 de independência:

```
> chisq.test(cabelo0lho)
```

Pearson's Chi-squared test

data: cabelo0lho

X-squared = 138.29, df = 9, p-value < 2.2e-16

Tabelas de contingência (cont.)

O exemplo de uma tabela de dupla entrada foi sobretudo ilustrativo. O interesse maior de modelos log-lineares corresponde ao estudo de tabelas definidas por **três ou mais factores**.

A diferentes conceitos de independência envolvendo três ou mais factores (independência, independência mútua, independência conjunta, independência condicional, etc.) **correspondem diferentes modelos log-lineares**.

A validade de um ou outro conceito de independência pode ser **estudada através da qualidade do ajustamento do correspondente modelo**.

Tabela de independências

A tabela indica as designações mnemónicas para vários tipos de modelos.

Notação	Tipo de Modelo	Equação do Modelo para $\ln(\lambda_{ijk})$	Relação-base
(A,B,C)	Independência Mútua	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$	$p_{ijk} = p_{i..} \cdot p_{.j.} \cdot p_{..k}$
(B:C)	Ind. conjunta (B,C) com A	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk}$	$p_{ijk} = p_{i..} \cdot p_{.jk}$
(A:B)	Ind. conjunta (A,B) com C	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij}$	$p_{ijk} = p_{ij.} \cdot p_{..k}$
(A:C)	Ind. conjunta (A,C) com B	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik}$	$p_{ijk} = p_{i.k} \cdot p_{.j.}$
(A:C,B:C)	Ind. (A,B) condicional a C	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk}$	$p_{ijk} = \frac{p_{i.k} \cdot p_{.jk}}{p_{.k}}$
(A:B,B:C)	Ind. (A,C) condicional a B	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk}$	$p_{ijk} = \frac{p_{ij.} \cdot p_{.jk}}{p_{.j.}}$
(A:B,A:C)	Ind. (B,C) condicional a A	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik}$	$p_{ijk} = \frac{p_{ij.} \cdot p_{i.k}}{p_{i.}}$
(A:B:C)	Modelo Saturado	$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	