

Exemplos de combinações lineares de vetores

► $(2, 4, -2) = 2(1, 2, -1) = 2(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3.$

► $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

► O vetor nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ é sempre CL de qualquer conjunto de m vetores $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$,

$$\vec{0} = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_m,$$

e cada um dos vetores v_i é também sempre CL dos m vetores do conjunto:

$$v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_m,$$

$$v_2 = 0 v_1 + 1 v_2 + \dots + 0 v_m,$$

$$\vdots$$

$$v_m = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 1 v_m.$$

Como determinar combinações lineares?

Vejamos agora num exemplo como podemos escrever um dado vetor como CL de um conjunto de vetores (caso seja possível).

Exemplo

Sejam $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $b = (2, 5, 1)$. Queremos determinar escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (caso existam) tais que $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Ora,

$$\begin{aligned} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \rightarrow [v_1 \ v_2 \mid b]. \end{aligned}$$

Logo (α_1, α_2) é solução do sistema cuja matriz ampliada é $[v_1 \ v_2 \mid b]$!

Como determinar combinações lineares?

- ▶ Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[v_1 \ v_2 \mid b]$, obtém-se

$$[v_1 \ v_2 \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- ▶ Como o sistema é **possível** podemos escrever b como CL de v_1 e v_2 .
- ▶ Para determinarmos os coeficientes α_1 e α_2 da CL aplicamos a fase ascendente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dashrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = & -2 \\ \alpha_2 & = & 3 \end{cases}$$

- ▶ Assim, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2v_1 + 3v_2$

Veremos no próximo slide que uma abordagem semelhante pode ser aplicada no caso geral para verificar se um vetor pode ser escrito como CL de um conjunto de vetores e determinar os coeficientes dessa CL, caso seja possível.

Combinações lineares via sistemas lineares

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ e b vetores de $\mathbb{R}^m$ e $A_{m \times n} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$.

Têm-se as seguintes equivalências:

- (i) $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.
- (ii) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema $Ax = b$, isto é, do sistema cuja matriz ampliada é $[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n \mid b]$.

Dem: Vamos considerar $n = 2$. A demonstração no caso geral é análoga. Recordemos da demonstração do slide 83 que podemos escrever $v_1 = Ae_1$ e $v_2 = Ae_2$ com $e = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Tem-se,

$$\begin{aligned} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &\Leftrightarrow b = \alpha_1 A e_1 + \alpha_2 A e_2 \Leftrightarrow b = \alpha_1 A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow b = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo (α_1, α_2) é solução do sistema $Ax = b$. $\square$

Corolário

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n, b \in \mathbb{R}^m$ e $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$. Tem-se:

- ▶ Se $Ax = b$ for **IMP**, b não é CL de $v_1, v_2, \dots, v_n$.
- ▶ Se $Ax = b$ for **PD**, b é CL de $v_1, v_2, \dots, v_n$ de uma única forma.
- ▶ Se $Ax = b$ for **PI**, b é CL de $v_1, v_2, \dots, v_n$ de infinitas maneiras distintas.

Exercícios

Considere os vetores $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 0)$.

- ▶ Escreva $(4, 6, 2)$ como CL de v_1, v_2 e v_3 de duas formas distintas.
- ▶ Mostre que $(0, 0, 1)$ não é CL de v_1, v_2 e v_3 .

Vamos estar interessados no próximo slide em obter todos os vetores que se podem escrever como combinação linear de um conjunto finito de vetores.

Espaço gerado

Espaço gerado por um conjunto de vetores

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Chama-se **espaço gerado** por $v_1, \dots, v_n$, denotado $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, ao **subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^m$ que são CL de $v_1, \dots, v_n$** , isto é,

$$\begin{aligned}\langle v_1, \dots, v_n \rangle &= \{b \in \mathbb{R}^m : b \text{ é CL de } v_1, \dots, v_n\} \\ &= \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Alguns exemplos

- ▶ $\langle \vec{0} \rangle = \{\vec{0}\}$ (**subespaço minimal**).
- ▶ $\langle \vec{v} \rangle = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ com $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, define a **reta de $\mathbb{R}^n$ que passa na origem com vetor diretor v** .
- ▶ Considerando $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_2 \rangle &= \{\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \text{ (**subespaço maximal**)}.\end{aligned}$$

- ▶ Mais geralmente, considerando $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$, $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

Espaço das colunas de uma matriz

Chama-se **espaço das colunas** de uma matriz $A_{m \times n}$ ao conjunto,

$$\mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível}\}.$$

Observação

Denotando $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ conclui-se pelo corolário do slide 105 que um vetor b é CL dos vetores $v_1, \dots, v_n$ se e só se o sistema $Ax = b$ for possível (PD ou PI), isto é,

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A).$$

Por outras palavras, o **espaço das colunas** de uma matriz A corresponde ao **espaço gerado** pelos vetores que constituem as colunas de A .

Exemplo

Consideremos $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 3, 1)$ do slide 102 e $A = [v_1 \ v_2]$. Queremos determinar todos os vetores que se podem escrever como CL de v_1 e v_2 , isto é, queremos determinar $\langle v_1, v_2 \rangle$. Ora tem-se,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^3 : Ax = b \text{ é possível}\}.$$

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A|b]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_3 \end{array} \right] = [A'|b'],$$

donde resulta que $Ax = b$ é possível se e só se $b_1 - 2b_3 = 0$ e portanto,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 - 2b_3 = 0\}.$$

Logo $b = (b_1, b_2, b_3)$ é CL de v_1 e v_2 se e só se verificar a equação $b_1 - 2b_3 = 0$. Por outras palavras, **os vetores que se podem escrever como CL de v_1 e v_2 definem o plano de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.**

O mesmo tipo de procedimento pode ser aplicado para **determinar o espaço gerado/espaço das colunas no caso geral, como veremos a seguir.**

Algoritmo

Input: $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m \times n} = [v_1 \ \dots \ v_n]$.

Objectivo: Determinar $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$.

Aplica-se a fase descendente do método de Gauss a $[A|b]$ com $b = (b_1, \dots, b_m)$ vetor genérico. Seja $[A'|b']$ obtida a partir de $[A|b]$ com A' em escada. Tem-se:

- ▶ Se A' **não possui linhas nulas**, não há restrições a impor ao vetor b e portanto obtém-se

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m.$$

- ▶ Se A' **possui linhas nulas**, há restrições a impor ao vetor b e obtém-se,

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \{(b_1, \dots, b_m) : b'_{i_1} = 0, b'_{i_2} = 0, \dots, b'_{i_k} = 0\},$$

onde $b'_{i_1}, b'_{i_2}, \dots, b'_{i_k}$ são as componentes do vetor b' associadas às linhas nulas da matriz em escada A' .

Neste caso $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$ é determinado por um sistema linear homogéneo, que designamos por **sistema de equações definidoras**.

Exemplos

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo do slide anterior determine os subespaços gerados, $U = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle$ e $V = \langle (2, 2, 3), (4, 4, 6) \rangle$.

No caso do subespaço U tem-se, denotando $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1)$ e $A = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$,

$$U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{b = (b_1, b_2, b_3) : Ax = b \text{ é possível}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss a $[A|b]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right] = [A'|b'].$$

Como A' não tem linhas nulas, não há restrições a impor a $b = (b_1, b_2, b_3)$ para o sistema ser possível (1º caso do algoritmo do slide 109). Logo $U = \mathbb{R}^3$, isto é, v_1, v_2, v_3, v_4 geram o subespaço maximal de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos (cont.)

Consideremos agora subespaço gerado V do exercício do slide anterior.

Tem-se, denotando $v_1 = (2, 2, 3)$, $v_2 = (4, 4, 6)$ e $A = [v_1 \ v_2]$,

$$V = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{b = (b_1, b_2, b_3) : Ax = b \text{ é possível}\}.$$

Aplicando a fase descendente à matriz $[A|b]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \\ 3 & 6 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{array} \right] = [A'|b'].$$

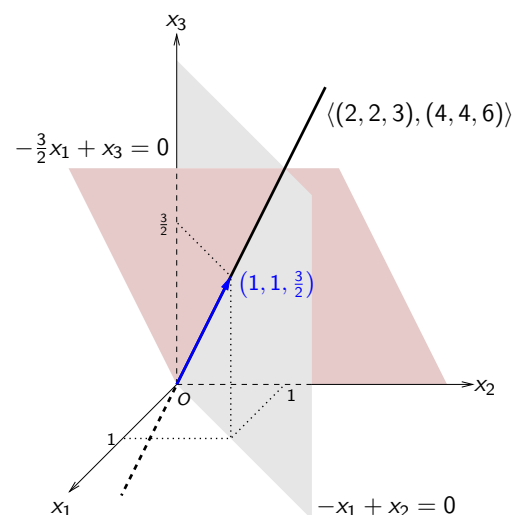
O sistema $Ax = b$ é possível se e só se a 2ª e 3ª componentes do vetor b' , que estão associadas às linhas nulas da matriz em escada A' , forem nulas, isto é, se e só se $b_2 - b_1 = 0$ e $b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 109), isto é, $b_2 = b_1$ e $b_3 = \frac{3}{2}b_1$. Logo,

$$\begin{aligned} V = \mathcal{C}(A) &= \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_2 = b_1, b_3 = \frac{3}{2}b_1 \right\} \\ &= \left\{ \left(b_1, b_1, \frac{3}{2}b_1 \right) : b_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b_1 \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) : b_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Exemplos (concl.)

Geometricamente, $V = \langle (2, 2, 3), (4, 4, 6) \rangle$ corresponde à **reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(1, 1, \frac{3}{2})$** , obtida como interseção dos planos $-x_1 + x_2 = 0$ e $-\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$



O espaço das colunas e o espaço gerado são subespaços vetoriais

Pelo algoritmo do slide 109, o espaço das colunas de uma matriz do tipo $m \times n$ ou coincide com $\mathbb{R}^m$ e nessa altura é o **subespaço vetorial maximal** ou pode ser definido por um sistema linear homogéneo e nessa altura coincide com o **espaço nulo de uma matriz** que é subespaço vetorial. Logo tem-se o seguinte resultado.

Teorema

Para toda a matriz A do tipo $m \times n$, $\mathcal{C}(A)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Daqui resulta imediatamente o seguinte corolário (porquê?).

Corolário

O espaço gerado por um conjunto (finito) de vetores de $\mathbb{R}^m$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Exemplo do slide 110 revisitado

Pela resolução do exercício do slide 110 tem-se,

$$V = \langle (2, 2, 3), (4, 4, 6) \rangle = \mathcal{C} \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Independência linear

Definição de independência linear

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

- ▶ $\{v_1, \dots, v_n\}$ diz-se **linearmente independente (l.i.)** se

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

isto é, se a combinação linear com **todos** os coeficientes nulos,

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = \vec{0},$$

for a **única** forma de escrever o vetor nulo como CL de $v_1, \dots, v_n$.

- ▶ Caso contrário $\{v_1, \dots, v_n\}$ diz-se **linearmente dependente (l.d.)**.

Por outras palavras, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente **dependente** se existem coeficientes **não todos nulos** $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$