

Subespaço definido por equações vs geradores

**Subespaço definido por
sist. linear homogéneo**
(equações cartesianas)

**Subespaço definido
por geradores**
(equação vetorial)

U definido por sistema
linear **homogéneo**, isto é,
 $U = \mathcal{N}(A)$
(A matriz do sistema)

$$\xrightarrow[\text{Calcular } \mathcal{N}(A)]{[A | \vec{0}] \rightarrow \dots \rightarrow [A'' | \vec{0}]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \{ \vec{0} \} \text{ } ^{(9)} \\ \text{ou} \\ U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle = \mathcal{C}(B) \text{ } ^{(10)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} V = \mathbb{R}^m \text{ } ^{(11)} \\ \text{ou} \\ V = \mathcal{N}(B) \text{ } ^{(12)} \end{array} \right\}$$

$$\xleftarrow[\text{Calcular } \mathcal{C}(A) \text{ (slide 109)}]{[A | b] \rightarrow \dots \rightarrow [A' | b']}$$

V gerado por vetores, isto é,
 $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$
($A = [v_1 \ \dots \ v_n]$)

⁹ Se $Ax = \vec{0}$ determinado, isto é, todas as colunas da matriz em escada A' têm pivot.

¹⁰ Se $Ax = \vec{0}$ é indeterminado e onde $u_1, \dots, u_k$ vetores diretores de U obtidos a partir da matriz reduzida A'' .

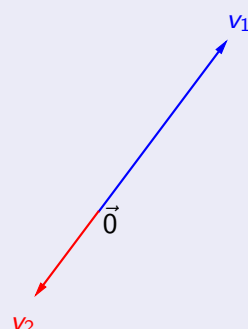
¹¹ Se não há linhas nulas na matriz em escada A' .

¹² Se há linhas nulas em A' e considerando B matriz dos coeficientes do sistema de equações definidoras.

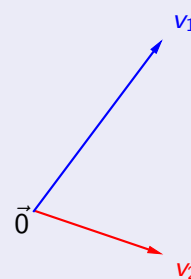
Independência linear de um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^m$

Definição “intuitiva” de independência linear

- ▶ $\{v\}$ diz-se linearmente **linearmente independente (l.i.)** se $v \neq \vec{0}$.
- ▶ $\{v_1, v_2\}$ diz-se **linearmente independente (l.i.)** se v_1 e v_2 são não colineares, isto é, nenhum dos vetores é múltiplo do outro vetor.



$\{v_1, v_2\}$ l.d.



$\{v_1, v_2\}$ l.i.

- ▶ Mais geralmente, um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ com $n \geq 2$, diz-se **linearmente independente (l.i.)** se nenhum dos vetores v_i for CL dos restantes $n - 1$ vetores do conjunto⁽¹³⁾.

Um conjunto de vetores que não é linearmente independente diz-se **linearmente dependente (l.d.)**.

¹³Note que no caso de dois vetores esta condição equivale a dizer que os vetores não são múltiplos um do outro

Independência linear - exemplos

Exemplos

- ▶ $\{(0, 0, 0)\}$ l.d.
- ▶ $\{(1, 2, 3)\}$ l.i.
- ▶ $\{(1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8)\}$ l.d. vetores colineares
- ▶ $\{(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8)\}$ l.i. vetores não colineares
- ▶ $\{(1, 0, 3), (0, 2, 6), (-2, 2, 0)\}$ l.d.
 $(-2, 2, 0) = -2(1, 0, 3) + (0, 2, 6)$
- ▶ $\{(1, 0, 3), (0, 2, 6), (-2, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ l.d.
 $(-2, 2, 0) = -2(1, 0, 3) + (0, 2, 6) + 0(0, 0, 1)$
- ▶ $\{(1, 0, 3), (0, 2, 6), (0, 0, 1)\}$?

Decidir sobre a independência linear de conjuntos com mais que dois vetores não é, em geral, imediato. Por essa razão vamos dar uma caracterização de independência linear via sistemas lineares.

(In)dependência linear via sistemas lineares

Critério de independência linear via método de Gauss

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A_{m \times n} = [v_1 \ \cdots \ v_n]$ e A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares. As seguintes afirmações são equivalentes:

- ▶ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente.
- ▶ Todas as colunas de A' têm pivot, isto é, $\text{car}(A) = n$.
- ▶ O sistema homogêneo $Ax = \vec{0}$ é determinado, isto é, $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$.

Exercício na aula

Considere $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α .

(In)dependência linear via sistemas lineares - exemplo

Resolução

Consideremos a matriz $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz A vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2]{L_2 - \alpha L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 - \alpha^2 \\ 0 & -1 & 3 - \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 - \alpha^2 \\ 0 & 0 & 6 - \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix} = A'.$$

Tem-se $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ todas as colunas de A' têm pivot $\Leftrightarrow$
 $6 - \alpha - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)6}}{2(-1)}$ (F.R.) $\Leftrightarrow \alpha \neq -3, 2$.

Cardinalidade máxima de um conjunto l.i.

Como a característica de uma matriz $A_{m \times n} = [v_1 \ \cdots \ v_n]$, isto é, o número de pivots de A' , não pode ser superior ao número de linhas de A e

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ l.i.} \Leftrightarrow \text{car}(A) = n,$$

deduz-se que se $\{v_1, \dots, v_n\}$ for l.i. então $n = \text{car}(A) \leq m$.

Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ possui no máximo m vetores.

- Por exemplo, considerando $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 3, 1, 4)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$, conclui-se imediatamente que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é linearmente dependente por ser constituído por $5 > 4$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

Caracterização alternativa de (in)dependência linear

Terminamos a independência linear com uma consequência do slide 117.

Teorema

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Tem-se que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente** se e só se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, **não todos nulos**, tais que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

Note-se que caso em que **$n = 1$** a condição anterior é equivalente a afirmar que **$v_1 = \vec{0}$** e que se **$n \geq 2$** é equivalente a afirmar que **pelo menos um dos vetores do conjunto é CL dos restantes vetores do conjunto** (cf. com o slide 115)

Por exemplo, considerando $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 2, 6)$ e $v_3 = (-2, 2, 0)$, vimos no slide 116 que $\{v_1, v_2, v_3\}$ era l.d. pois $v_3 = -2v_1 + v_2$. Daqui resulta a CL nula, com os coeficientes **não todos nulos**,

$$2v_1 + (-1)v_2 + 1v_3 = 2(1, 0, 3) - (0, 2, 6) + (-2, 2, 0) = (0, 0, 0).$$

- O conceito de (in)dependência linear que aparece na sebenta da UC, *Texto de Apoio de Álgebra Linear*, usa este tipo de caracterização.

Base e dimensão de um subespaço vetorial

Vamos dar agora aquele que é, possivelmente, o **conceito mais central em Álgebra Linear**.

Intuitivamente uma base de um subespaço vetorial V é um subconjunto de vetores de V que (i) não contém vetores “redundantes” no sentido em que nenhum dos vetores da base se pode obter como CL dos restantes vetores da base, mas (ii) contém vetores “suficientes” de modo a que todo o vetor do subespaço V se possa escrever como CL dos vetores da base.

Definição de base

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $\underline{v_1, \dots, v_k} \in V$. Diz-se que $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma **base** de V se verificar as condições:

- (i) $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente.
- (ii) $v_1, \dots, v_k$ geram V , isto é, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = V$.

Teorema-definição

Todas as bases de um mesmo subespaço vetorial V possuem o mesmo número de vetores a que chamamos **dimensão de V** e denotamos por **$\dim V$** .

Base e dimensão de um subespaço vetorial - exemplos

Vejamos alguns exemplos de bases de subespaços vetoriais.

- ▶ Consideremos $V = \langle (1, 1, 1) \rangle = \{ \alpha(1, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R} \}$, que define uma reta que passa na origem com direção $v = (1, 1, 1)$. Este subespaço admite a base $\{v\}$ uma vez $\{v\}$ é linearmente independente e gera V (por definição). Em particular, $\dim V = \text{número de vetores da base} = 1$.
- ▶ Consideremos $V = \mathbb{R}^3$. Vejamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são as colunas da matriz identidade de ordem 3, que se designa por base canónica de $\mathbb{R}^3$:
 - (i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente, pois a matriz $A = [e_1 \ e_2 \ e_3]$ é a matriz identidade de ordem 3, I_3 , que já está em escada e possui todas as colunas com pivot.
 - (ii) $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$. De facto:

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle &= \{ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \} \\ &= \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Em particular, $\dim \mathbb{R}^3 = \text{número de vetores da base} = 3$.

Construção de bases e dimensão de subespaços vetoriais

Um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$ pode ser definido das seguintes formas:

- ▶ $V = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal).
- ▶ $V = \mathbb{R}^n$ (subespaço maximal).
- ▶ *Como CS de um sistema de equações lineares homogéneas / espaço nulo de uma matriz.* Por exemplo,
 - ▶ $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 6x_2 = 0\},$

ou seja, $V = \mathcal{N}(A),$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$

- ▶ *Gerado por um conjunto de vetores / espaço das colunas de uma matriz.* Por exemplo,

▶ $V = \langle (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 0), (1, 0, 1, 2), (2, 1, 1, 3) \rangle,$

ou seja, $V = \mathcal{C}(A),$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Base e dimensão dos subespaços minimal e maximal

Base e dimensão do subespaço minimal

Convenciona-se que $\{\vec{0}\}$ é a (única) base do subespaço minimal $\{\vec{0}\}$. Uma vez que esta base não possui vetores tem-se,

$$\dim \{\vec{0}\} = 0$$

A base canónica de $\mathbb{R}^3$ do slide 122 generaliza-se para $\mathbb{R}^n$ com n arbitrário.

Base canónica e dimensão do subespaço maximal $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ formado pelas n colunas da matriz identidade I_n ,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

constitui uma base de $\mathbb{R}^n$ que se designa por **base canónica (b.c.)**, tendo-se

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

Em particular, **qualquer** outra base para $\mathbb{R}^n$ terá **também** que possuir n vetores.

Caracterização das bases do subespaço maximal

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ e consideremos $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ que é uma matriz quadrada de ordem n . Seja A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares. Uma vez que A' é também uma matriz **quadrada** obtêm-se, aplicando os resultados dos slides 117 e 109, as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \{v_1, \dots, v_n\} \text{ lin. indep.} &\Leftrightarrow \text{todas as colunas de } A' \text{ têm pivot} \\ &\Leftrightarrow \text{não há linhas nulas em } A' \\ &\Leftrightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle = C(A) = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo por definição de base provámos o seguinte resultado.

Teorema (Critério para definir base do subespaço maximal $\mathbb{R}^n$)

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- ▶ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.
- ▶ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente.
- ▶ $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

Bases de subespaços maximais - exemplo

Pelo teorema do slide anterior e pelo resultado do slide 119 tem-se o seguinte resultado.

Corolário

As bases de $\mathbb{R}^m$ são os conjuntos linearmente independentes com m vetores, ou seja, os conjuntos lin. indep. de cardinalidade máxima⁽¹⁴⁾.

Exemplo na aula

Quais dos seguintes conjuntos é lin. indep. / gera $\mathbb{R}^3$ / base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1, 0, 0), (2, 5, 0)\}$. sim / não / não
2. $\{(1, 0, 0), (2, 5, 0), (3, 5, 0)\}$. não / não / não
3. $\{(1, 0, 0), (2, 5, 0), (3, 5, 9)\}$. sim / sim / sim
4. $\{(1, 0, 0), (2, 5, 0), (3, 5, 9), (x, y, z)\}$. não / sim / não

¹⁴E são também os conjuntos de geradores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade mínima.

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercício

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

TPC

Determinar uma base do hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

Resolução do exercício do slide anterior

Reduzindo a matriz $[A | \vec{0}]$ obtém-se (verifique),

$$[A | \vec{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Tem-se que $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$ uma vez que existem variáveis livres (x_3 e x_4), obtendo-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2x_3 - 4x_4, x_2 = x_3 + x_4, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2x_3 - 4x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2x_3, x_3, x_3, 0) + (-4x_4, x_4, 0, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(-2, 1, 1, 0) + x_4(-4, 1, 0, 1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \text{todas as somas de múltiplos de } (-2, 1, 1, 0) \text{ e } (-4, 1, 0, 1) \\ &= \langle (-2, 1, 1, 0), (-4, 1, 0, 1) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{N}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Como v_1 e v_2 não são múltiplos entre si, $\{v_1, v_2\}$ é **lin. indep.**
Logo por definição $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$ e **$\dim \mathcal{N}(A) = \text{n}^\circ$ de vetores da base = 2.**

Observações

- ▶ O primeiro vetor da base do slide anterior, $v_1 = (-2, 1, 1, 0)$, corresponde à solução do sistema $Ax = \vec{0}$ considerando a variável livre $x_3 = 1$ e a variável livre $x_4 = 0$:

$$(-2x_3 - 4x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{x_3=1, x_4=0} (-2, 1, 1, 0) = v_1.$$

- ▶ Analogamente, o segundo vetor da base, $v_2 = (-4, 1, 0, 1)$, corresponde à solução de $Ax = \vec{0}$ com $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$:

$$(-2x_3 - 4x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{x_3=0, x_4=1} (-4, 1, 0, 1) = v_2.$$

- ▶ Vetores de $\mathcal{N}(A)$ construídos desta forma são sempre linearmente independentes...