INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

ESTATÍSTICA E DELINEAMENTO EXPERIMENTAL – 2025-26

12 de janeiro de 2026 **Primeira Chamada de Exame** **Solução**

ATENÇÃO: O que se apresenta não é uma resolução, mas sim soluções, em muitos casos, sem a necessária justificação.

I [14 valores]

1. (a) A: $T_{\text{calc}} = 0.63$ (valor calculado da estatística do teste T de hipóteses $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0$);
   B: $R^2_{mod} = 0.74574$ (valor do R^2 modificado);
   C: $\widehat{\text{Cov}}[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_0] = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = 27424.81068$ (estimativa da variância do estimador da ordenada na origem).

   (b) $R^2 = 0.7502$ indica que cerca de 75% da variância dos valores observados do teor de fenóis total é explicada por este modelo de RLM. Não é um valor muito alto, mas é significativamente diferente de zero, já que o teste F de ajustamento global ($H_0 : \mathcal{R}^2 = 0$ vs. $H_1 : \mathcal{R}^2 > 0$) apresenta um p-value $< 2.2 \times 10^{-16} \approx 0$, muito inferior a qualquer um dos usuais níveis de significância. Logo, rejeita-se a hipótese H_0 e concluí-se que o modelo difere significativamente do modelo nulo.

   (c) I. C. a 95% para β_6: $]0.910836, 1.282464[$. Este intervalo representa os valores admissíveis do parâmetro β_6, com 95% de confiança. Isto é, quando o teor de antocianas aumenta 1 mg/l, mantendo os restantes preditores constantes, o teor de fenóis total aumenta, em média, entre 0.910836 e 1.282464 mg/l.

   (d) A afirmação feita corresponde a $\beta_2 < -5$. Dando o ónus da prova a esta afirmação, a resposta à pergunta pode ser obtida através de um teste T com as seguintes hipóteses, $H_0 : \beta_2 \geq -5$ vs. $H_1 : \beta_2 < -5$. Depois de apresentar todos os passos deste teste, obtém-se $T_{\text{calc}} = -0.5837$ e concluí-se que não existe evidência experimental para considerar a afirmação verdadeira, ao nível de significância $\alpha = 0.05$.

   (e) A primeira variável a sair do modelo será o `pH`. Pela análise aos p-values dos testes T, $H_0 : \beta_i = 0$ vs. $H_1 : \beta_i \neq 0$, para $i = 1, \ldots, 6$, das duas variáveis candidatas a sair do modelo (p-value $> \alpha = 0.10$), esta é a que apresenta o maior valor de p-value.

   (f) i. AIC (modelo completo) = 3024.64

   ii. O `pH` é a primeira variável a ser excluída pois o submodelo resultante tem menor AIC (3022.78) que o modelo inicial (completo) e que todos os restantes submodelos com menos uma variável.
   O `pesobago` é a segunda variável a ser excluída pois o submodelo obtido com a sua exclusão apresenta um AIC (3021.27) inferior ao submodelo anterior e a todos os outros submodelos sem o pH e outra das variáveis.
   Mais nenhuma variável é excluída pela aplicação deste algoritmo pois os AICs dos submodelos obtidos pela saída de mais uma variável, são todos superiores ao do submodelo final do passo anterior.

   iii. Demonstração feita na aula teórica e presente nos apontamentos do modelo linear (pág. 112).

   iv. Teste F parcial, $H_0 : \beta_1 = \beta_3 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0 \vee \beta_3 \neq 0$. Depois de apresentar todos os passos deste teste, obtém-se $F_{\text{calc}} = \frac{336}{2} \times \frac{2228748-2224617}{2224617} = 0.31196$ e concluí-se que modelo e submodelo não diferem significativamente, ao nível $\alpha = 0.05$, pelo que se prefere o submodelo que é mais simples.

   v. A análise dos gráficos de resíduos apresentados deve feita considerando três aspetos:
   - breve descrição do que está representado no gráfico,
   - o que é suposto ver no gráfico se forem válidos os pressupostos do modelo linear em estudo,
   - o que está efetivamente presente no gráfico e as suas consequências para o modelo ajustado.

Os dois primeiros pontos foram apresentados nas aulas (teóricas e práticas) e encontram-se descritos nos apontamentos do modelo linear (pág. 63 a 72, 129 a 133).
Relativamente ao último ponto, o gráfico da esquerda (*Q-Q Residuals*) apresenta uma boa linearidade, indicando que o pressuposto da normalidade dos erros aleatórios deve ser válido.
O gráfico da direita (*Residuals vs Leverage*) indica que há duas observações (299 e 70) que podem ser consideradas observações atípicas (*outliers*) pois apresentam resíduos estandardizados (R_i) grandes, superiores a 4. No entanto, como os seus valores do efeito alavanca (*leverage*) são relativamente baixos e não têm uma distância de Cook elevada ($D_i < 0.5$), não são por isso consideradas observações influentes. Deste modo, ainda que possam ser sujeitas a uma análise mais detalhada para saber se podem estar associadas a algum engano, não devem gerar grande preocupação. A outra observação assinalada no gráfico (215) é a que apresenta o maior valor do efeito alavanca, cerca de 0.07, mas muito inferior ao máximo *leverage* (um). Não deve ser, por isso, considerada uma observação que tenda a "atrair"demasiado o hiperplano ajustado. Por fim, como não há pontos para além das isolinhas 0.5 da distância de Cook, não há observações que possam classificar-se de influentes, ou seja, qualquer das observações quando retirada do conjunto de dados não gera grandes alterações no ajustamento.

2. (a) $\texttt{fenois} = 1413.2321 - 7.2996\ \texttt{volumebago}$ para a região da Sardenha.

   (b) No contexto da ANCOVA, a pergunta efetuada traduz-se no teste T ao acréscimo ao declive da recta da região de referência (Saragosa) para a região Sardenha ($\alpha_{1:2}$), $H_0 : \alpha_{1:2} = 0$ vs. $H_1 : \alpha_{1:2} \neq 0$. De acordo com o $T_{\text{calc}} = -0.216$ deste teste e o correspondente p-value = 0.829, muito superior a qualquer dos habituais níveis de significância, em particular $\alpha = 0.01$, não se rejeita H_0 e podemos admitir que os declives das duas rectas não são significativamente diferentes.

   (c) Pede-se a comparação entre um modelo de covariância (rectas diferenciadas por região) e um seu submodelo (recta única). O teste F parcial, dado no comando `anova` do *output* do R, permite concluir que não se rejeita a hipótese do modelo e do submodelo não diferirem significativamente ao nível $\alpha = 0.01$, já que o correspondente p-value = 0.02931 > 0.01. Tendo os dois modelos uma qualidade idêntica (ao nível 0.01), deve preferir-se o modelo de recta única que é mais simples.

   (a) Na RLS, o coeficiente de determinação (R^2) é igual ao quadrado do coeficiente de correlação entre as variáveis preditora e resposta (r_{x^*,y^*}) e o sinal de r_{x^*,y^*} é igual ao sinal do declive da recta de regressão, logo $r_{x^*,y^*} = -0.648228$.

   (b) $\texttt{fenois} = 29943.27388 \times \texttt{volumebago}^{-0.84051}$ (relação potência).

   (c) $SQT^* = 17.278$

3. (a) Prova feita nas aulas teóricas e na página 13 dos apontamentos de apoio.

   (b) $Var(\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix}$ com as expressões dadas no formulário da UC.

I [6 valores]

1. Admitindo que as observações estão ordenadas pelos respectivos níveis, $\boldsymbol{X}_{(9\times3)} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{1_9}} & \overrightarrow{\boldsymbol{I_2}} & \overrightarrow{\boldsymbol{I_3}} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) As unidades experimentais são as parcelas.
   (b) As pseudo-repetições são as 20 plantas de cada parcela.
   (c) Há três repetições por cada tratamento.
   (d) Em cada local, o delineamento foi totalmente casualizado.
   (e) Existem dois factores: o local (factor A com 5 níveis) e a desfolhação (factor B com 3 níveis).
   (f) Modelo ANOVA a 2 factores, factorial, com interação. Este modelo e os seus pressupostos foram descritos nas aulas teóricas e práticas, estão descritos nos slides das aulas teóricas e nos apontamentos do modelo linear (pág. 175). Deve adaptar-se a sua descrição (legenda) ao caso de estudo apresentado.
   (g) i. A = 4, B = 10.44, C = 1452095.5
       ii. De acordo com os resultados do teste F, há efeitos de interação local - nível de desfolhação.
       iii. Os resultados apresentados representam dois dos intervalos de confiança (IC) a 95% de Tukey:
       - IC a 95% para $\mu_{21} - \mu_{11}$: $]-3013.0314\ ,\ -213.63522[$
         Como $0 \notin$ IC, conclui-se, com 95% de confiança, que $\mu_{21} \neq \mu_{11}$ ou, de modo equivalente, que $\bar{y}_{21} = 2342$ e $\bar{y}_{11} = 3955$ são significativamente diferentes ao nível $\alpha = 0.05$.
       - IC a 95% para $\mu_{31} - \mu_{11}$: $]-2501.0314\ ,\ 298.36478[$
         Como $0 \in$ IC, conclui-se, com 95% de confiança, que $\mu_{31} = \mu_{11}$ ou, de modo equivalente, que $\bar{y}_{31} = 2854$ e $\bar{y}_{11} = 3955$ não são significativamente diferentes ao nível $\alpha = 0.05$.

3. Teste de Kruskal Wallis pois há um único factor (desfolhação).

   H_0 : Os três níveis de desfolhação têm a mesma distribuição cumulativa das observações da variável resposta vs. H_1 : Os três níveis de desfolhação não têm a mesma distribuição cumulativa.

   Como $H_{\text{calc}} \approx 6.49$, conclui-se que a distribuição cumulativa do número médio de sementes por planta e por parcela é diferente para os três níveis de desfolhação.