

- ▶ Os slides de apoio às aulas teóricas baseiam-se na matéria da sebenta [Texto de Apoio de Álgebra Linear](#) e vários dos seus esquemas e/ou figuras provêm da sebenta ou são versões modificadas de esquemas e figuras da sebenta.
- ▶ A matéria exposta nestes slides deve ser complementada com a leitura dessa sebenta.

Vetores do **plano** ($\mathbb{R}^2$) e vetores do **espaço** ($\mathbb{R}^3$)

- ▶ Recordemos que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.
- ▶ O conjunto dos **vetores do plano** é o conjunto dos vetores com 2 componentes reais que se denota por $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, $(1, -\pi) \in \mathbb{R}^2$.

- ▶ Analogamente, o conjunto dos **vetores do espaço** é o conjunto dos vetores com 3 componentes reais, denotado $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, $(1, -\pi, 0) \in \mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^n$ - conjunto dos vetores com n componentes

- Em geral, dado um inteiro $n \geq 2$, denotamos o conjunto dos vetores com n componentes reais por $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\},$$

onde x_i é a componente do vetor x que se encontra na posição i .

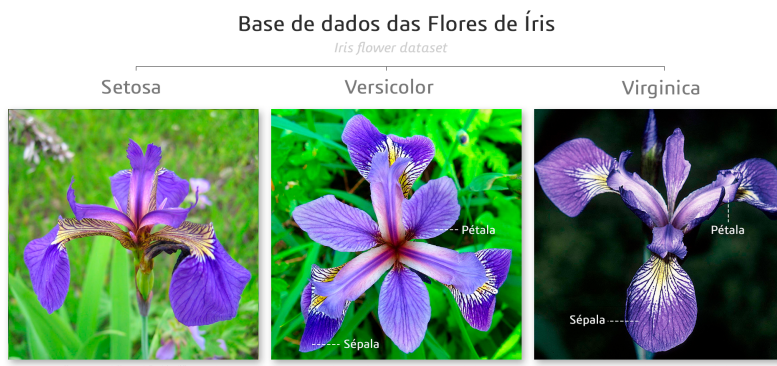
Por exemplo, se $x = (1, -\pi, 0, 2, 3, -4) \in \mathbb{R}^6$, tendo-se $x_4 = 2$.

- ▶ Os **números reais** serão também designados por *escalares* por oposição a vetores

Porque queremos estudar conjuntos de vetores em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$?
E como “visualizar” esses conjuntos?

Um famoso conjunto de dados

Ronald Fisher, um famoso estatístico mediu os comprimentos e larguras das sépalas e pétalas (em cm) de 50 lírios de cada 3 espécies distintas, *Setosa*, *Versicolor* e *Virgínica*.



(https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_dados_flor_Iris#/media/Ficheiro:Flores_de_Iris.png)

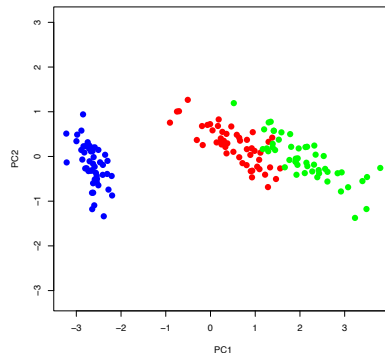
A tabela a seguir apresenta os valores obtidos para alguns dos lírios.

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	5.9	3.0	5.1	1.8	virginica

O melhor retrato do conjunto de dados dos lírios

O conjunto de dados dos 150 lírios origina uma nuvem de 150 pontos num espaço a 4 dimensões **que não conseguimos visualizar**, em que o vetor de coordenadas de cada ponto contém o comprimento e a largura das sépalas e pétalas de cada lírio (vetor com 4 componentes).

Usando métodos de Álgebra Linear podemos projetar esta nuvem de pontos num plano de modo a obter-se o **melhor retrato** possível, no sentido em que melhor preserva as distâncias originais entre as flores, ou equivalentemente, a **variabilidade** do conjunto:



Pode-se observar no retrato que, por exemplo, os comprimentos e as larguras das sépalas e pétalas **diferenciam** claramente os lírios da espécie **Setosa** dos lírios das restantes 2 espécies **Versicolor** e **Virginica**. Este tipo de conjuntos de dados são estudados em áreas tais como a Estatística Multivariada, áreas essas que usam de forma crucial de diversos conceitos e resultados de Álgebra Linear.

Operações sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$)

Recordemos as operações algébricas bem conhecidas sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$). Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

► **Adição de vetores:**

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

► **Produto de um vetor por um escalar:**

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

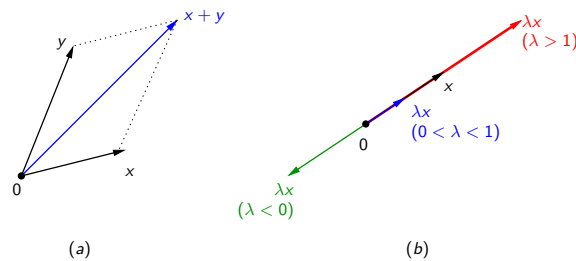
► **Produto escalar (ou interno) de vetores:**

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Por exemplo, se $x = (3, 1)$, $y = (2, 5)$ e $\lambda = 2$, obtém-se

$$x + y = (5, 6), \quad 2(3, 2) = (6, 4), \quad (3, 1) \cdot (2, 5) = 11.$$

Interpretação geométrica das operações sobre vetores



Para todos os vetores não nulos do plano, x e y , tem-se a relação bem conhecida,

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|},$$

onde θ é o ângulo formado por x e y . Resulta, em particular, da relação anterior a chamada **desigualdade de Cauchy-Schwarz** (C.-S.),

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|,$$

onde $\|x\|$ e $\|y\|$ são os comprimentos dos vetores x e y , respetivamente.

A extensão das operações algébricas para vetores com um número arbitrário de componentes faz-se de modo óbvio.

Operações sobre vetores de $\mathbb{R}^n$

Definição

► **Adição de vetores:**

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

isto é, somam-se as componentes homólogas dos vetores

► **Produto de um vetor por um escalar:**

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

isto é, multiplicam-se todas as componentes do vetor pelo escalar

► **Produto escalar (ou interno) de vetores:**

$$x \cdot y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

sendo ainda válida a desigualdade de C.-S. neste caso o que nos permite, em particular, definir ângulo entre vetores de $\mathbb{R}^n$

Propriedades das operações sobre vetores

Adição de vetores e o produto de vetores por escalares verificam várias propriedades que decorrem imediatamente das propriedades dos números reais (falaremos mais adiante nas propriedades do produto escalar).

Propriedades das operações algébricas

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos...)
8. $1x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)