Capítulo 2 Introdução à Teoria da Probabilidade

Exercícios de Introdução à Probabilidade

2.1. Considere os acontecimentos A e B tais que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ e $P(A \cup B) = 0.8$. Determine:

$$P(A \cap B); \quad P(A - B); \quad P(\overline{A} \cap B); \quad P(A \cup \overline{B}).$$

2.2. Considere o tempo de vida de uma lâmpada em centenas de horas.

Seja $\Omega = \{t : t > 0\}$ o espaço de resultados associado à duração de vida da lâmpada. Considere os acontecimentos:

$$A = \{t : t > 15\} \;\; B = \{t : 2 < t < 10\} \;\; C = \{t : t < 12\}$$

Caracterize os seguintes acontecimentos:

$A \cup B \qquad A \cap C \qquad A \cap \overline{B} \qquad (A \cup B) \cap \overline{C} \qquad \overline{A} \cup (B \cap C).$

2.3. Sejam A e B acontecimentos aleatórios definidos num espaço de resultados Ω. Mostre que:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$;

b) A probabilidade de ocorrer um e apenas um dos acontecimentos A ou B é igual a $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

2.4. Sejam A e B acontecimentos num espaço de resultados Ω tais que $P(A) + P(B) = x$ e $P(A \cap B) = y$. Determine em função de x e de y a probabilidade de:

a) Que se realize pelo menos um dos dois acontecimentos.

b) Que se realize um e um só dos dois acontecimentos.

c) Não se realizar qualquer dos dois acontecimentos.

d) Que se realize quanto muito um único acontecimento.

2.5. Sejam A e B acontecimentos tais que $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.7$. Determine $P(B)$ sabendo que :

a) A e B são acontecimentos independentes;

b) A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos.

2.6. Sejam A, B e C três acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

a) Sabendo que $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(A) = 0.3$, $P(\overline{B}) = 0.7$, $P(C) = 0.5$ e $A \cap B = C \cap B = \emptyset$, determine $P(A \cap C)$. Justifique.

b) Se $P(A) = 0.3$ e $P(\overline{B}) = 0.2$, mostre que A e B são acontecimentos não mutuamente exclusivos.

c) Mostre que se A e B são acontecimentos independentes $\Longrightarrow \overline{A}$ e $\overline{B}$ são acontecimentos independentes.

2.7. Numa propriedade agrícola, sabe-se que 60%, 75% e 50% das árvores são de folha caduca, de fruto e de fruto com folha caduca, respectivamente. Calcule a probabilidade de uma árvore da propriedade, escolhida ao acaso:

a) não ser árvore de fruto;

b) ser árvore de fruto ou de folha caduca;

c) ser árvore de fruto, sabendo que tem folha caduca.

2.8. As probabilidades de três corredores de velocidade percorrerem 100 metros em menos de 10 segundos são respectivamente: 1/3, 1/5 e 1/10. Considerando que os tempos dos três atletas são independentes, calcule a probabilidade de, uma corrida em que participam apenas os três atletas, ser ganha em menos de 10 segundos.

2.9. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma dada experiência aleatória e A e B acontecimentos em Ω com $P(A) > 0$.

a) Defina o seguinte conceito: "os acontecimentos A e B são mutuamente exclusivos".

b) Se A e B são acontecimentos tais que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ e $P(A|\overline{B}) = 0.5$

i) Determine a probabilidade de que pelo menos um dos acontecimentos, A ou B, se realize.

ii) Determine a probabilidade de que um e só um dos acontecimentos A ou B se realize.

iii) Mostre que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ não são mutuamente exclusivos.

iv) Serão A e B independentes? Justifique.

c) Prove que $P(A) \times [P(B|A) - 1] + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A})$.

2.10. Sejam A, B e C acontecimentos independentes definidos num espaço de resultados Ω.

a) O que significa dizer "A, B e C são acontecimentos independentes"?

b) Mostre que também são acontecimentos independentes:

i) A e $B \cap C$;

ii) A e $B \cup C$.

c) Mostre que:

i) $P(A \cup B) = P(A)P(\bar{B}) + P(B)$;

ii) $P[(A \cap B) \cup C] = P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(C)$.

d) Mostre que se $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, com $0 < P(B) < 1$, então A e B são acontecimentos independentes.

2.11. Considere três acontecimentos A, B e C tais que $P(C) = 0.3$, $P(B|C) = 0.4$, $P(\overline{B}|\overline{C}) = 0.8$, $P(A|(B \cap C)) = P(A|\overline{(B \cap C)}) = 0.2$.

a) Calcule $P(C|B)$.

b) Calcule $P[(B \cap C)|A]$.

c) Diga, justificando, se os três acontecimentos são ou não independentes.

2.12. Sejam A e B acontecimentos tais que $P(B|A) = 1/4$, $P(B|\overline{A}) = 1/3$ e $P(A) = 2/5$.

a) Determine $P(B)$ e $P(\overline{A}|B)$.

b) Serão A e B acontecimentos independentes? E mutuamente exclusivos? Justifique.

2.13. (*Teste 8.11.2017*) Considere três acontecimentos A, B e C constituindo uma partição de Ω tais $P(A) = P(B) = x$ e $P(C) = x/2$.

a) Defina "A, B e C constituem uma partição de Ω".

b) Seja F outro acontecimento definido em Ω tal que $P(F) = 0.2$. Sendo $P(F|A) = P(F|B) = 0.1$, determine, justificando $P(F|C)$.

2.14. Sejam A, B e C três acontecimentos aleatórios tais que $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(C) = c \neq 0$,

$P(A \cap B \cap C) = d$ e A e B são independentes.

a) Determine, em função de a, b e c:

i) $P(A \cup B)$ ii) O valor de d de modo que A, B e C possam ser independentes.

b) Determine, em função de a, b, c e d:

i) $P[(A \cap B)|C]$ ii) $P(A \cap B \cap \overline{C})$.

2.15. Um teste detecta a presença de um certo tipo de bactérias na água com uma probabilidade 0.9 no caso de o referido tipo existir. Se não existir, detecta a sua ausência com probabilidade 0.8. Sabendo que a probabilidade de que uma amostra de água contenha bactérias daquele tipo é 0.20, calcule a probabilidade de que, ao retirar uma amostra ao acaso:

a) o teste dê resultado positivo,i.e., detecte a presença de bactérias;

b) haja de facto bactérias quando o teste dá positivo;

c) o teste dê um resultado errado.

2.16. Um determinado tipo de peças é produzido pelas fábricas F_1, F_2 e F_3. Durante um certo período de tempo, F_1 produziu o dobro das peças de F_2 enquanto F_2 e F_3 produziram o mesmo número de peças. Sabe-se ainda que 2%, 2% e 4% das peças produzidas por F_1, F_2 e F_3, respectivamente, são defeituosas. Todas as peças produzidas nesse período de tempo foram colocadas num depósito.

a) Qual a percentagem de peças defeituosas e que são provenientes da fábrica F_2?

b) Qual a percentagem de peças defeituosas armazenadas?

c) Foi encontrada uma peça defeituosa no depósito. Qual a origem(fábrica) menos provável dessa peça?

2.17. Num dado país 10% da população sofre de uma determinada doença: 6% de forma grave e 4% de forma moderada. Para o seu diagnóstico é efectuado um teste que dá resultado positivo:

– com probabilidade 1 para um indivíduo com doença na forma grave;

– com probabilidade 0.75 para um indivíduo com doença na forma moderada;

– com probabilidade 0.05 para um indivíduo não doente.

a) Efectuando um teste num indivíduo ao acaso, qual a probabilidade de o resultado ser positivo?

b) Se, para um dado indivíduo, o resultado do teste foi positivo, qual a probabilidade de ele ter a doença?

c) Será que existe independência entre ter a doença na forma moderada e na forma grave? Justifique.

2.18. Os trabalhadores de uma empresa da área alimentar foram classificados em três níveis de acordo com o grau de instrução: formação mínima, formação média e formação superior.

Sabe-se que 55% dos trabalhadores tem salário superior a 1000 euros. Em particular, têm salário superior a 1000 euros 70% dos trabalhadores com formação superior, 40% dos trabalhadores com formação média e nenhum trabalhador com formação mínima. Sabe-se ainda que 60% dos trabalhadores têm formação superior.

Escolhendo um trabalhador ao acaso, calcule a probabilidade de:

a) Ter formação média.

b) Ter formação superior, sabendo que ganha mais de 1000 euros.

2.19. O estudo das soluções aquosas existentes num laboratório relativamente ao seu pH e comprimento de onda de absorção conduziu aos seguintes resultados:

- 40% das soluções são ácidas, 20% são alcalinas e as restantes são neutras;
- 25% das soluções ácidas absorvem na zona de comprimentos de onda do vermelho;
- 5% das soluções são neutras e absorvem na zona de comprimentos de onda do vermelho;
- a probabilidade de uma solução absorver na zona de comprimentos de onda do vermelho é 0.2.

Seleccionando ao acaso uma solução no laboratório, determine a probabilidade de a solução:

a) ser neutra e não absorver na zona de comprimentos de onda do vermelho;

b) absorver na zona de comprimentos de onda do vermelho sabendo que é alcalina;

c) não ser neutra e não absorver na zona de comprimentos de onda do vermelho.

2.20. (*Exame 7.01.2010*) Estudos recentes indicam que a probabilidade de existir petróleo numa determinada região do Algarve é de 0.2. Sabe-se que, caso haja petróleo, a probabilidade de este sair na primeira perfuração é de 0.4.

a) Qual a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração?

b) Se na primeira perfuração não apareceu petróleo, qual a probabilidade de existir petróleo na região?

2.21. (*Teste 12.11.2014*) Os copos de vidro de laboratório são embalados e transportados em caixas pequenas, médias e grandes na proporção de 6:3:1, respectivamente. Suponha que 3%, 2% e 1% dos copos embalados em pequenas, médias e grandes caixas, respectivamente, se partem durante o transporte.

a) Qual a probabilidade de um copo seleccionado ao acaso se partir durante o transporte?

b) Qual a probabilidade de um copo partido ter sido transportado numa caixa média?

c) Qual a percentagem de copos transportados em caixas grandes e que não se partem?

2.22. (*Exame 10.1.2018*) Uma empresa do ramo alimentar utiliza três transportadoras (T_1, T_2 e T_3) para distribuir os seus produtos no mercado.

Sabe-se que a probabilidade de haver atraso nas entregas em cada uma das transportadoras é 0.05, 0.1 e 0.25, respectivamente. Devido aos custos associados, cada uma das transportadoras T_2 e T_3 é utilizada duas vezes mais do que T_1.

a) Determine a probabilidade de haver atraso na entrega de um dado produto.

b) Sabendo que não houve atraso na entrega de um produto, qual a probabilidade de ele ter sido distribuído pela transportadora T_2?

2.22A. (*Teste 7.11.2018*) Num aeroporto existe um sistema de radares para detectar a presença de drones num dado raio de influência. Os radares detectam um drone em 98% das vezes quando ele está presente. Contudo, se não existir nenhum drone, os radares indicam a sua presença em 0.1% dos casos. A probabilidade de haver um drone nessa área é 0.01.

a) Qual a probabilidade de um drone ser detectado e não estar presente?

b) O sistema detectou um drone. Qual a probabilidade de o sistema ter falhado?

c) Calcule a probabilidade de o sistema de radares errar.

Exercícios de Variáveis Aleatórias e Pares Aleatórios

2.23. Uma caixa contém 10 iogurtes, estando 4 estragados. Retiram-se 3 sem reposição. Seja X a variável aleatória que representa o número de iogurtes estragados retirados.

a) Construa a distribuição de probabilidades de X.

b) Represente graficamente a distribuição obtida na alínea a).

c) Determine a função distribuição cumulativa de X e represente-a graficamente.

d) Calcule $P(1 \leq X \leq 3)$.

2.24. Cinco bolas são retiradas, com reposição, de uma urna que contém 4 bolas vermelhas e 6 bolas brancas. Seja X a variável aleatória que representa o total de bolas vermelhas retiradas.

a) Determine a função massa de probabilidades de X.

b) Determine a função distribuição cumulativa de X e represente-a graficamente.

c) Calcule $P(1 \leq X \leq 3)$.

2.25. Num laboratório existem 40 ratos dos quais 30% são machos. Caracterize a variável aleatória X que conta o número de fêmeas que aparecem numa amostra de 8 ratos quando a selecção da amostra é feita:

a) Com reposição.

b) Sem reposição.

Determine o valor médio e a variância de X em cada uma das situações anteriores.

2.26. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	-2	-1	0	1	2
$P[X = x_i]$	0.1	0.3	0.1	0.2	0.3

a) Calcule $E[X]$ e $Var[X]$.

b) Determine a função distribuição cumulativa de X.

c) Calcule $P(X \geq 0 | X < 2)$.

d) Determine a distribuição de probabilidades da variável aleatória $Y = X^2$.

2.27. O número de televisores encomendados mensalmente em determinada loja é bem descrito por uma variável aleatória X com a seguinte função distribuição cumulativa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0.1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0.3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.5 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Determine a função massa de probabilidade da variável aleatória X.

b) Quantos televisores deve ter a loja em *stock*, por mês, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas seja superior a 0.85?

c) Se num dado mês a loja só tiver 2 televisores em *stock*, determine a distribuição de probabilidades da variável aleatória que representa a diferença, em valor absoluto, entre as encomendas e o *stock*.

2.28. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	$1-2k$	$k-1$	k	$2k$
p_i	p	$3p$	p	p

a) Sabendo que $E[X]=1/3$ calcule o valor de p e k.

b) Calcule $Var[X]$.

c) Deduza a distribuição de probabilidades da variável aleatória $Y=X^2-2$.

2.29. Seja X uma variável aleatória com valor médio μ_X e variância σ_X^2. Seja $Y=\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}$.

Determine $E[Y]$, $Var[Y]$ e $E[Y^2]$.

2.30. Considere a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X assim definida:

$$f(x)=\begin{cases} a\,x^2 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{outros valores de } x.\end{cases}$$

a) Determine a.

b) Determine a função de distribuição cumulativa de X.

c) Determine a mediana de X.

d) Calcule o valor b tal que a probabilidade de X exceder b seja igual a 0.05.

2.31. (*Exame 28.01.2013*) Considere que a concentração de poluente (em unidades adequadas) nos gases emitidos por uma fábrica é uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\leq 0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2})x & \text{se } 0<x<2\\ e^{-x} & \text{se } x\geq 2.\end{cases}$$

a) Determine a função distribuição cumulativa de X.

b) Indique duas propriedades que uma qualquer função distribuição cumulativa deve verificar. Averigue se a função que obteve na alínea anterior verifica essas propriedades.

c) Qual é a probabilidade de a concentração ser superior a 2?

d) A concentração mediana será superior ou inferior a 2? Justifique.

2.32. Considere a variável aleatória contínua X com a seguinte função distribuição cumulativa, com $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ ax+b & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Determine a e b.

b) Determine a função densidade de probabilidade de X.

c) Calcule o primeiro quartil da distribuição de X.

d) Calcule $P(X < 1 | X \geq \frac{1}{2})$.

e) Calcule:

i) $E[X]$ e $Var[X]$;

ii) $E\left[\frac{1}{X+2}\right]$, $E[3X+2]$, $Var[2X+5]$ e $Var[2-3X]$.

2.33. Um fornecedor de um produto de laboratório tem uma capacidade de armazenamento de 150 kg. No início de cada mês é reposto o stock até à capacidade máxima de armazenamento. As vendas mensais deste produto em centenas de kg são dadas por uma variável aleatória X, cujo comportamento é bem descrito pela seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 1.5 \\ 0 & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

a) Determine a função distribuição cumulativa da v.a. X.

b) Se a dada altura de um mês já foram vendidos 50 kg do produto, qual a probabilidade de se venderem mais de 100 kg no fim desse mês?

c) Indique o valor médio mensal e a mediana mensal das vendas daquele produto.

d) O lucro, Y, da venda do referido produto é função de vários factores. Considere a seguinte expressão (simplificada) do lucro em função das vendas $Y = 50X - 25$.

i) Qual o valor esperado do lucro mensal?

ii) Qual a probabilidade de, num dado mês, não haver prejuízo ?

2.34. Seja X uma variável aleatória contínua cuja função distribuição cumulativa é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 3x/4 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ kx - x^2/4 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ k & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Determine a constante k.

b) Obtenha a função densidade de probabilidade de X e faça a sua representação gráfica.

c) Calcule o valor esperado e a mediana de X.

d) Determine:
i) $P[X \geq 1]$ ii) $P[X < 3/2 | X > 1/2]$.

2.35. Num processo de inventário concluíu-se que a raridade de determinada espécie animal era directamente proporcional à área observada até que se avistasse um exemplar da espécie, associada ao percurso de amostragem. Considere então a v.a. X designando a distância percorrida até se avistar algum exemplar da espécie, com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{2\,x^2} & 1 \leq x \leq b \\ 0 & \text{restantes valores de } x. \end{cases}$$

a) Determine b de modo que $f(x)$ seja uma função densidade.

b) Determine a função de distribuição cumulativa de X.

c) Calcule a mediana de X.

d) Considere a v.a. $Y = C_0 + C_1 X$, que caracteriza o custo de amostragem, onde C_0 designa os custos fixos e C_1 o custo por unidade de percurso. Determine o custo esperado para o inventário.

2.36. (*Exame 12.01.2015*) Num estudo prévio à instalação de uma central eólica numa dada região, um meteorologista considerou que a velocidade diária mínima do vento X, em m/s, é uma variável aleatória com função de distribuição cumulativa, F, assim definida

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{x-2}{3}\right) & \text{se } x \geq a, \;\; a > 0 \end{cases}$$

a) Mostre, justificando, que $a = 2$.

b) Determine a função densidade de X.

c) Determine a mediana de X.

d) Determine a probabilidade de num dado dia a velocidade mínima exceder 3 m/s se for inferior a 5 m/s.

e) Admita que no caso da velocidade diária mínima ser inferior ou igual a 5 m/s, a central eólica funcionará adequadamente com uma probabilidade de 0.01, mas se for superior a 5 m/s funcionará adequadamente com uma probabilidade de 0.95.

   i) Qual a percentagem de dias em que a central funcionará adequadamente?

   ii) Qual a probabilidade de num dado dia a central não estar a funcionar adequadamente e a velocidade mínima do vento ser superior a 5 m/s?

2.37. A proporção (em volume) de determinada substância química num produto pode ser considerada uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade da forma:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{o. v. de } x \end{cases}$$

a) Determine a.

b) Determine a função distribuição cumulativa de X.

c) Sempre que a proporção da referida substância é inferior a 0.5 o produto é de qualidade inferior. Qual a probabilidade de num produto que foi considerado de qualidade inferior a proporção daquela substância ser superior a 0.25?

d) Determine o valor esperado e a variância da proporção de substância no produto.

e) Seja Y o valor comercial (em euros) de cada unidade de volume de produto, função da proporção da substância, assim definido $Y = 2X$.

   i) Determine a função densidade de probabilidade de Y.

   ii) Qual a probabilidade de uma unidade de volume daquele produto ser vendida por mais de 1 Euro?

   iii) Exprima $Cov[X,Y]$ em termos de $Var[X]$ e determine o seu valor.

2.38. (*Teste 7.11.2018*) O número de exemplares de cada uma de duas espécies animais, A e B, avistados numa visita, pode ser considerado um par aleatório (X,Y) em que X designa o número de exemplares da espécie A e Y da espécie B. Dispõe-se da seguinte informação sobre a distribuição de probabilidade conjunta do par (X,Y):

X \ Y	0	1	2	3
0	a	0.3	0.02	0
1	b	0.07	0.14	0.04
≥ 2	0.02	0.03	0.04	0.06

a) Determine a distribuição marginal da v.a. Y e a respectiva função distribuição cumulativa.

b) Determine a e b sabendo que $P[X=0|Y=0] = 0.6$.

c) Determine o valor esperado do número de exemplares avistados da espécie B, quando se avistam pelo menos dois da espécie A.

d) Comente a seguinte afirmação: *as variáveis aleatórias X e Y podem ou não ser independentes consoante os valores de a e de b.*

2.39. Sejam X e Y o número de vitelos e leitões, respectivamente, que nascem anualmente numa pequena quinta de criação de gado.

O quadro seguinte dá a distribuição de probabilidades conjunta de X e Y.

X \ Y	6	7	8	9	10
2	0.05	0.04	0.04	0.10	0.02
3	0.13	0.10	0.10	0.10	0.07
4	0.07	0.06	0.06	0.05	0.01

a) Escreva a distribuição de probabilidades do número de leitões nascidos por ano nesta quinta.

b) Serão X e Y v.a. independentes? Justifique.

c) Considere o número total de leitões e vitelos que nascem anualmente. Qual o valor esperado para aquele total?

d) Determine a distribuição de probabilidades do número de vitelos que nascem num dado ano, sabendo que nasceram 7 leitões.

2.40. Um cliente de uma livraria pode fazer encomendas de livros estrangeiros em inglês e francês que não existam em stock.

O número de livros em inglês e francês encomendados semanalmente é o par aleatório (X,Y) com a seguinte distribuição de probabilidades:

X \ Y	1	2	3	4
0	0.01	0.02	0.04	0.03
1	0.05	0.10	0.20	0.15
2	0.04	0.08	0.16	0.12

a) Qual a probabilidade de numa semana serem encomendados no máximo dois livros?

b) Qual a percentagem de semanas em que existe igualdade de livros ingleses e franceses encomendados?

c) Determine as funções distribuição cumulativa marginais das variáveis X e Y.

d) Calcule o coeficiente de correlação entre as variáveis X e Y e interprete o seu resultado.

e) Qual a distribuição de probabilidades da variável aleatória "Número total de livros em inglês e francês encomendados semanalmente"?

f) Qual a probabilidade de numa semana se encomendar pelo menos um livro em inglês sabendo que foram encomendados dois livros em francês?

2.41. Seja (X,Y) o par aleatório com a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} a\,(x+y) & 1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{restantes valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante a.

b) X e Y são variáveis aleatórias independentes? Justifique.

c) Calcule $P[Y < X]$ e $P[Y > 3 - X]$. Comente.

d) Determine o valor médio de $1/X$.

e) Determine a função densidade condicional de $Y \mid X = 3/2$.

f) Calcule $P[Y < 3/2 \mid X = 3/2]$.

2.42. Seja (X,Y) um par aleatório contínuo com função densidade de probabilidade conjunta assim definida:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Determine as densidades marginais de X e de Y.

b) X e Y são variáveis aleatórias independentes? Justifique a sua resposta.

c) Calcule a função distribuição cumulativa de Y.

d) Calcule $P[Y < 1 - X]$.

e) Calcule $P[X < 1/4 \mid Y = 1/2]$.

2.43. (*Adaptado do teste de 8.11.2017*) Considere o par aleatório (X,Y) que representa as proporções de dois compostos diferentes $C1$ e $C2$, respectivamente, numa amostra de uma mistura química usada como insecticida. Considere a função densidade de probabilidade conjunta de (X,Y) assim definida:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 < x+y \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Esboce a região do plano onde a função densidade conjunta toma valores não nulos.

b) Considere que estamos apenas interessados no composto $C1$.

   i) Determine a função densidade e a função de distribuição cumulativa de X.

   ii) Qual a percentagem de amostras que possuem uma proporção de composto $C1$ inferior a 0.5?

   iii) Determine o valor médio de X.

   iv) A mediana de X é inferior ou superior ao valor médio de X? Justifique.

c) Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique.

d) Determine a probabilidade de o composto $C2$ entrar na amostra em proporção superior ao composto $C1$.

e) Determine $Cov(X,Y)$.

2.44. Um depósito de água para rega tem uma capacidade de 20000 litros. Seja X a variável aleatória que designa a quantidade de água, em dezenas de milhares de litros, que existe no depósito, no início de cada semana. Seja Y a quantidade, também em dezenas de milhares de litros, gasta na rega durante a semana. Suponha que X e Y têm função densidade de probabilidade conjunta assim definida:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2} & \text{se} \quad 0 \leq y \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Determine as densidades marginais de X e de Y. Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique.

b) Qual a probabilidade de a quantidade de água gasta na rega durante uma dada semana ser inferior a 5000 litros, sabendo que no início dessa semana:

   i) O depósito contém mais de 10000 litros de água?

   ii) O depósito contém exactamente 10000 litros de água?

c) Qual a probabilidade de numa dada semana se gastar exactamente a quantidade existente no depósito no início da semana?

d) Qual a quantidade média de água existente no depósito no início de cada semana?

2.45. (*Exame 25.01.2010*) Seja (X,Y) um par aleatório cuja função densidade de probabilidade conjunta é assim definida:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y\, e^{-x} & \text{se } x > 0 \quad \text{e} \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Determine as densidades marginais de X e de Y e identifique a distribuição de X.

b) Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique.

c) Determine $E[X]$, $E[Y]$ e $Cov[X,Y]$.

d) Calcule $P[Y > \sqrt{X}]$.

2.46. (*Exame 31.01.2011*) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com funções densidade de probabilidade definidas, respectivamente, por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases} \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } y. \end{cases}$$

a) Determine, justificando, a função densidade conjunta de (X,Y).

b) Determine $P[X > \frac{1}{2} | \frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}]$.

c) Calcule $E[XY]$.

2.47. (*Exame 31.01.2012*) Num projecto duas tarefas A e B decorrem de forma independente. Sejam X e Y as v.a.s contínuas que representam o tempo (em anos) de duração das tarefas A e B, respectivamente. As funções densidade de X e de Y são:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases} \quad ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores de } y. \end{cases}$$

a) Determine a função distribuição cumulativa de X.

b) Qual é a probabilidade de a tarefa A durar mais de meio ano?

c) Qual é o tempo médio de duração da tarefa A?

d) Determine a função densidade conjunta do par (X,Y). Justifique.

e) Calcule a covariância entre as variáveis X e Y. Justifique.

f) Determine a probabilidade de a tarefa A durar mais tempo do que a tarefa B.

g) Determine a probabilidade de a tarefa A durar mais de meio ano se:

  i) a tarefa B durar menos de 1 ano.

  ii) a tarefa B durar 1 ano.

h) Determine:

i) O valor médio do quociente $X/(Y+1)$.

ii) $Var[X-Y]$

iii) $Cov[X, Y-X]$

2.48. (*Teste 11.11.2015*) Uma empresa agrícola produz anualmente pimento e tomate nas quantidades, respectivamente, X e Y (em toneladas). A função densidade de probabilidade conjunta que descreve a produção daqueles dois produtos da empresa é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x+1) & \text{se } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Esboce a região do plano onde a função densidade conjunta toma valores não nulos.

b) Considere apenas a produção de pimento, X.

   i) Determine a função densidade de probabilidade que descreve a produção de pimento.

   ii) Calcule a função de distribuição cumulativa de X.

   iii) Determine a produção anual esperada de pimento.

c) Serão as produções de pimento e tomate independentes? Justifique.

d) Supondo que num dado momento a produção de pimento é de meia tonelada, determine a probabilidade de a produção de tomate ser superior a 750 kg.

Principais Distribuições Discretas e Contínuas

2.49. Uma experiência aleatória pode dar dois resultados: êxito ou fracasso, sendo a probabilidade de resultar em êxito de 0.9. O custo de uma experiência que resulte em êxito é de 5 euros e em fracasso de 10 euros. A experiência é repetida 20 vezes, de forma independente. Seja X a variável aleatória que conta o número de êxitos.

a) Identifique a distribuição de X.

b) Calcule $P[X > 15]$.

c) Calcule a probabilidade de haver mais êxitos do que fracassos.

d) Mostre que o custo total C das 20 experiências pode ser expresso como $C = 200 - 5X$.

e) Calcule $E(C)$.

f) Calcule $P[C < 125]$.

2.50. (*Teste 12.11.2014*) Um produtor de bolbos de tulipa sabe que 5% dos seus bolbos não vingam. Estes bolbos são vendidos em sacos de 10 unidades.

a) Caracterize a variável que designa o número de bolbos que não vingam em cada saco.

b) Calcule a probabilidade de, num saco escolhido ao acaso, só um bolbo não vingar.

c) O produtor anuncia que, em cada saco, pelo menos 9 bolbos vingam. Determine a percentagem de clientes que podem reclamar devido a publicidade enganosa.

2.51. Numa experiência laboratorial injectaram-se n cobaias com uma determinada droga que inibe a síntese de proteínas. A probabilidade de uma cobaia morrer durante a experiência, devido à droga, é 0.2. Seja X a v. a. que designa "o número de cobaias que morreram durante a experiência".

a) Identifique o modelo de probabilidade para X.

b) Supondo que se utilizaram 15 cobaias, qual a probabilidade de:

   i) Duas delas morrerem?

   ii) Pelo menos 8 delas sobreviverem?

c) Determine o número mínimo de cobaias que têm que ser utilizadas na experiência de modo que a probabilidade de morrer pelo menos uma cobaia seja superior a 0.95.

2.52. O número de unidades de um produto procurado diariamente pelos clientes de uma empresa é uma v.a. X com distribuição uniforme discreta tomando valores $0, 1, 2, 3$.

a) Determine o valor esperado e a variância de X.

b) Obtenha a distribuição de probabilidade da variável $Y = 2X + 1$. Caracterize a distribuição que obteve e comente o resultado.

2.53. (*Teste 12.11.2014*) Seja X uma v.a. com distribuição binomial de parâmetros $n = 2$ e $p = 0.1$ e seja Y outra v.a. com distribuição uniforme discreta tomando valores 0 e 1.

a) Escreva a função massa de probabilidade de cada uma das variáveis X e Y.

b) Determine $E[Y]$ e $Var[Y]$.

c) Mostre que $Z = 2Y + 1$ é uma variável aleatória que tem também distribuição uniforme discreta.

d) Sendo X e Y variáveis independentes determine, justificando:

   i) A distribuição de probabilidade conjunta do par (X,Y).

   ii) $Cov[X,Y]$.

   iii) $Var[Y-2X]$.

2.54. Um instrumento para medição de humidade é constituído por 3 componentes instaladas de forma independente. Todas as componentes têm a mesma probabilidade de avariar, igual a 0.1.

a) Identifique e caracterize a variável aleatória que designa o número de componentes avariadas no referido instrumento.

b) Determine a probabilidade de duas ou mais componentes avariarem.

c) Para os instrumentos nas condições referidas, se nenhuma das 3 componentes está avariada, o instrumento funciona sempre, se uma única componente está avariada o instrumento tem probabilidade 0.6 de funcionar e se 2 ou mais componentes estão avariadas, não funciona. Determine a probabilidade de:

   i) O instrumento funcionar.

   ii) Existir uma componente avariada se o instrumento está a funcionar.

d) Numa encomenda de 10 dos instrumentos das alíneas anteriores para instalar em 10 locais diferentes, quantos instrumentos se espera virem a falhar?

2.55. Seja X uma variável aleatória com distribuição $B(n;p)$ e Y a variável aleatória definida por $Y = \frac{X}{n}$. Calcule:

a) $E[Y]$, $Var[Y]$ e $E[Y^2]$;

b) A função geradora de momentos de Y.

2.56. A probabilidade de um atirador acertar num alvo é $p = 1/4$.

a) Seja X a variável aleatória que conta o número de tiros necessários até acertar, pela primeira vez, no alvo. Determine n tal que $P[X \leq n] > 0.8$.

b) Quantos tiros espera o atirador dar até acertar pela primeira vez no alvo?

2.57. O Duarte vai posicionar-se na linha de lançamento livre num campo de basquetebol e atirar até fazer um cesto. Se admitirmos que os lançamentos são independentes e de probabilidade de acertar constante e igual a 0.8, determine:

a) a probabilidade de necessitar de menos de 5 lançamentos para acertar;

b) o número esperado de lançamentos que tem que efectuar para acertar.

2.58. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes. Determine a distribuição de $X_1 + X_2$ quando:

a) X_1 e X_2 têm distribuição binomial de parâmetros (n_1, p) e (n_2, p), respectivamente.

b) X_1 e X_2 têm distribuição geométrica, com o mesmo parâmetro p.

2.59. Uma pessoa planta 6 bolbos, escolhidos ao acaso de uma caixa que contém 15 bolbos de túlipa e 10 bolbos de junquilho. Qual a probabilidade de essa pessoa plantar 2 bolbos de junquilho e 4 de túlipa?

2.60. Um método frequentemente utilizado para estimar o número de animais de uma dada espécie num certo habitat é o da captura-recaptura. O método pode ser exemplificado pela seguinte situação:

> Num lago são capturados, marcados e devolvidos à água 5 peixes de uma certa espécie. Passado algum tempo (a fim de permitir que os peixes marcados se distribuam aleatoriamente pelo lago, embora não convenha deixar passar demasiado tempo, para se poder admitir que a dimensão da população permaneceu constante) são pescados 4 peixes dessa mesma espécie e conta-se quantos de entre eles estão marcados, o que será representado pela variável aleatória X.

a) Qual a probabilidade de nenhum dos 5 peixes marcados ser recapturado, se existirem 10 peixes da referida espécie no lago? E se existirem 100?

b) A ideia do método de captura-recaptura consiste em considerar o tamanho da população como sendo aquele que torna mais provável o valor de X que resultou de uma experiência deste tipo. Assim, por exemplo, qual dos 4 valores $N = 10$, $N = 20$, $N = 100$ ou $N = 1000$, considera mais plausível para o tamanho da população se:

   i) da experiência resultou $X = 1$;

   ii) da experiência resultou $X = 2$.

2.61. (*Teste 23.11.2010*) Num armazém encontra-se um lote de 10000 latas de um certo produto alimentar. Deste lote, 500 latas já ultrapassaram o prazo de validade. O organismo responsável pelo controle de qualidade vai analisar uma amostra. Considere que o processo de amostragem é feito **com reposição**.

a) Suponha que as latas são inspeccionadas sucessivamente **até encontrar uma fora do prazo de validade**.

   i) Identifique e caracterize a variável em estudo.

   ii) Qual a probabilidade de ser necessário inspeccionar 3 ou mais latas?

   iii) Qual o número esperado de latas inspeccionadas?

b) Suponha agora que retira uma amostra de 15 latas. O controle de qualidade rejeita o lote se nessa amostra forem encontradas mais do que duas latas fora do prazo de validade.

i) Calcule a probabilidade de rejeição do lote.

ii) O que pode dizer do valor calculado na alínea anterior no caso de o processo de amostragem ser feito **sem reposição**? Justifique.

2.62. O número de petroleiros que chega a uma certa refinaria, em cada dia, é uma v.a. X com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 2$. As actuais instalações portuárias da refinaria podem atender até 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 petroleiros chegam num dia, os petroleiros em excesso são enviados para outro porto.

a) Qual a probabilidade de, num dado dia, a refinaria ter de recusar petroleiros?

b) Qual deverá ser a capacidade de atendimento da refinaria para permitir o acolhimento de todos os petroleiros que chegam em cerca de 95% dos dias?

c) Qual o número esperado de petroleiros chegados por dia?

d) Qual o número mais provável de petroleiros chegados num dia?

e) Qual a probabilidade de em dois dias chegarem 5 petroleiros?

f) Qual o número esperado de petroleiros atendidos num dia?

g) Qual o número esperado de petroleiros recusados num dia?

2.63. Uma empresa de aluguer de autocarros para excursões de longo curso dispõe de 5 veículos. Sabe-se, pela análise do seu comportamento, que a procura semanal de veículos segue uma distribuição de Poisson de média 3.

a) Determine a probabilidade de, em certa semana, um dos autocarros não ser alugado.

b) Qual a probabilidade de, em duas semanas, serem procurados 6 veículos?

c) Determine o valor esperado do número de clientes que em certa semana não podem ser atendidos por já estarem alugados todos os autocarros.

2.64. Suponha que o tempo, em minutos, necessário para que um técnico afine cada componente de uma máquina numa linha de produção é bem descrito por uma variável aleatória X com distribuição $U(5;10)$.

a) Qual a probabilidade de que uma componente escolhida ao acaso:

i) Tenha necessitado de mais de 7 minutos para ser afinada.

ii) Tenha exigido ao técnico um tempo de afinação inferior a 9 minutos sabendo que aquele tempo foi superior a 7 minutos.

b) Seja $Y = 10 + 5X$ o custo em euros de afinação de cada componente. Qual o custo esperado de afinação de uma componente escolhida ao acaso?

2.65. (*Exame 7.01.2010*) Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua no intervalo $]-\theta, \theta[$, sendo θ um valor real positivo.

a) Calcule a função de distribuição cumulativa de X.

b) Calcule o valor médio, a mediana e a variância de X.

c) Considere a variável aleatória $Y = 2X + 1$.

   i) Determine $P[1 < Y < \theta + 1]$.

   ii) Calcule $Cov(X,Y)$.

   iii) Serão Y e X variáveis aleatórias independentes? Justifique.

2.66. Uma empresa agro-química fabrica mensalmente 90 toneladas de um dado produto. Sabendo que a procura mensal deste produto é uma variável aleatória aproximadamente normal de parâmetros μ =80 t e σ =10 t, calcule:

a) A probabilidade de a procura mensal do produto se situar entre 68 e 90 toneladas;

b) A probabilidade de haver num mês procura insatisfeita;

c) A produção necessária para que a probabilidade de haver procura mensal insatisfeita seja 0.025.

2.67. Um grossista de distribuição de fruta recebe do produtor pêssegos de quatro categorias: extra, A, B e C. Da experiência anterior, sabe-se que o diâmetro de um pêssego é uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal de média 64 mm e desvio padrão 3 mm. A classificação do referido fruto em função do seu diâmetro é a seguinte:

Categoria	Diâmetro (X) em mm
C	$X \leq 60$
B	$60 < X \leq 65$
A	$65 < X \leq 70$
Extra	$X > 70$

Atendendo aos custos de armazenamento e de distribuição, admite-se que o lucro líquido por tonelada é de 80 euros para a categoria extra, 50 euros para a categoria A, 10 euros para a categoria B e -5 euros para a categoria C.

Qual o lucro líquido esperado de um fornecimento constituído por uma tonelada de pêssegos?

2.68. O comprimento da raiz principal de uma dada espécie de arbusto é bem modelado por uma distribuição normal de média 50 cm e desvio padrão 5 cm.

a) Qual a probabilidade de um arbusto seleccionado ao acaso ter uma raíz principal com comprimento superior a 54 cm?

b) Em 200 arbustos desta espécie, qual o número deles em que se espera que as raízes principais tenham comprimento superior a 54cm?

c) Qual a probabilidade de a raíz principal de um arbusto seleccionado ao acaso ter comprimento entre 50 e 56 cm?

d) Qual a probabilidade de a média dos comprimentos da raiz principal de 9 arbustos seleccionados ao acaso ser superior a 52cm?

2.69. Admita que o conteúdo (em ml) de frascos de certo xarope segue uma distribuição normal de parâmetros $\mu = 200$ ml e $\sigma = 2$ ml.

a) Qual a probabilidade de um frasco adquirido ao acaso ter menos de 195 ml de xarope?

b) Se comprar 5 frascos, qual a probabilidade de ficar em casa com menos de 0.99 l de xarope?

c) Num lote de 30 frascos qual a probabilidade, aproximada, de haver no máximo 5 com menos de 195 ml?

2.70. Uma fábrica produz motores cujo tempo de vida é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros μ =10 anos e σ =2 anos. A fábrica quer criar um período de garantia para os motores de forma a que não mais de 3% tenham de ser substituídos. Qual deverá ser o período de garantia máximo oferecido pela fábrica?

2.71. Um produto pesa em média 10 g com desvio padrão de 2 g. Este produto é embalado em caixas com 50 unidades cada. Sabe-se que as caixas vazias pesam em média 500 g com desvio padrão de 25 g. Admita que as variáveis peso do produto e da caixa vazia são independentes com distribuição normal.

a) Qual é a probabilidade, aproximada, de numa caixa encontrar no máximo 10 unidades do referido produto com peso inferior a 8 g cada?

b) Qual é a probabilidade de uma caixa cheia pesar mais do que 1050 g?

2.72. Seja Y uma variável aleatória contínua com a seguinte função geradora de momentos:

$$M_Y(t) = \mathrm{e}^{3t+8t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Calcule a função geradora de momentos da variável aleatória $X = \dfrac{Y-3}{4}$.

b) Determine o valor médio e a variância de X.

c) Se $W \frown N(\mu, \sigma)$ então a função geradora de momentos de W é definida por

$$M_W(t) = \mathrm{e}^{\mu t+(t^2\sigma^2)/2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Identifique as distribuições de X e Y.

2.73. Um determinado modelo de avião pode transportar uma carga máxima (passageiros e bagagens) de 9000 kg. Admita que o peso da bagagem de um passageiro é uma variável aleatória com distribuição $N(18,5)$, que o peso de um passageiro-homem é uma variável aleatória com distribuição $N(70,10)$ e que o peso de um passageiro-mulher é uma variável aleatória com distribuição $N(60,10)$.

a) Qual é o peso da bagagem de um passageiro que é excedido por 20% dos passageiros, no máximo?

b) Considere um casal (homem e mulher) que entra no avião. Qual a probabilidade de o peso da mulher ser superior ao do homem? Que hipóteses tem de admitir para responder a esta questão?

c) Num determinado vôo a lotação do avião está completa com 80 homens e 20 mulheres, que levam a respectiva bagagem. Qual a probabilidade de o avião não poder partir por excesso de carga?

d) A companhia pratica a cobrança de uma taxa para bagagens com peso superior a 20 kg. Havendo 60 passageiros num vôo, qual é a probabilidade, aproximada, de que mais de 10 passageiros paguem a referida taxa.

2.74. (*Exame 22.01.2009*) Num restaurante, a procura semanal (em litros) de uma determinada marca de cerveja segue uma distribuição normal com desvio padrão 4 litros. Sabe-se que em 50% das semanas a procura é inferior a 50 litros.

a) Determine o valor médio e a variância da variável aleatória que designa a procura semanal de cerveja daquela marca.

b) Calcule a probabilidade de, numa semana, a procura ser superior a 60 litros.

c) Qual deverá ser a quantidade de cerveja que deve existir em cada semana de modo que a probabilidade de haver ruptura de stock seja igual a 0.015?

d) Sendo cada litro de cerveja é vendido a 5 euros, caracterize a lei da venda mensal (4 semanas) de cerveja, admitindo que em cada semana não se esgota o stock.

2.75. (*Exame 7.1.2010*) O número de ovos postos por segundo em certo aviário pode ser considerado uma v.a. X com distribuição de Poisson de valor médio 1.

a) Mostre que $P[X=0]=P[X=1]$ e que para todo o $k>1$ se tem $P[X=k]<P[X=k-1]$. Comente.

b) Qual a probabilidade de num período de 5 segundos serem postos mais do que três ovos? Justifique.

c) Sabendo que numa dada região existem 40 aviários idênticos a este, qual a probabilidade, aproximada, de o número total de ovos postos por segundo nessa região ser inferior a 30? Justifique.

2.76. (*Exame 7.1.2010*) A produção semanal de uma plantação de bananas é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição normal de média 5 t e desvio padrão 2 t. Admita que a produção é independente de semana para semana.

a) Numa semana escolhida ao acaso, qual a probabilidade de a produção de bananas ser inferior a 3 t? E superior a 7 t?

b) A plantação tem despesas fixas semanais no valor de 2000€. O produtor vende as bananas a 500€ por tonelada. Qual a probabilidade de, numa dada semana em que toda a produção é escoada, o valor da venda ser inferior às despesas fixas? Justifique.

c) Qual a probabilidade de num mês (4 semanas) se conseguir satisfazer uma encomenda de 23 t de bananas? Justifique.

d) Determine a probabilidade de, em 8 semanas escolhidas ao acaso, haver no máximo uma em que a produção foi inferior a 3 t.

2.77. Suponha que os elos de uma corrente de bicicleta têm comprimentos aleatórios com distribuição normal de média 0.5 cm e desvio padrão 0.04 cm. As normas de um fabricante de bicicletas exigem que o comprimento de uma corrente esteja compreendido entre 49 e 50 cm .

a) Qual a percentagem de elos cujo comprimento excede 0.6cm?
b) Se uma corrente tiver 100 elos, qual a proporção de correntes a satisfazer as normas exigidas?
c) Utilizando apenas 99 elos, que valor deverá assumir o desvio padrão para que 90% das correntes satisfaça as normas do fabricante?

2.78. Suponha que o peso de um pacote de farinha é uma variável aleatória que se admite ter valor médio 1 kg e desvio padrão 0.05 kg. Pretende-se arrumar 99 pacotes numa prateleira que suporta 100 kg. Qual o risco de a prateleira desabar? Justifique.

2.79. A produção diária de azeite num lagar segue uma distribuição normal com desvio padrão 50 litros. Em 50% dos dias de laboração, a produção é inferior a 950 litros. Admita que a produção é independente de dia para dia.

a) Indique o valor da produção que não é excedido em 95% dos dias.
b) Qual a percentagem de dias em que a produção se afasta da média mais do que 100 litros?
c) Qual a probabilidade, aproximada, de a produção mensal (30 dias) ser inferior a 28000 litros?

2.80. (*Exame 31.01.2012*) A temperatura diária em graus Celsius registada durante o verão de um ano, numa certa localidade às 12h, é uma v.a. X que segue uma distribuição normal com $\mu = 27°$C e $\sigma = 2°$C.

a) Qual a probabilidade de se registar uma temperatura inferior a 28.7°C?
b) Considere as temperaturas referentes a 10 anos, no verão, às 12h no mesmo local. Qual a probabilidade de se registar uma temperatura inferior a 28.7°C em mais de 3 anos?
c) Um turista americano que planeia visitar aquele local transforma a temperatura em graus Fahrenheit através da relação $Y = \frac{9}{5}X + 32$.
   i) Qual é a distribuição da temperatura expressa em graus Fahrenheit? Justifique.
   ii) Determine a probabilidade de o turista ter que enfrentar temperaturas superiores a 90°F.

2.81. Num edifício funcionam 7 elevadores. A carga máxima de cada elevador é de 320 kg. A dada altura entra um grupo de 4 pessoas em cada um dos elevadores. Calcule a probabilidade de no máximo 3 elevadores não funcionarem se o peso de uma pessoa for considerado uma variável aleatória com distribuição normal de média 71,75 kg e desvio padrão 10 kg.

2.82. O número de avarias por mês nos comboios da linha de Sintra que provocam a interrupção da circulação é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 3.5$. O número de avarias num dado mês é independente do número de avarias nos outros meses.
Por outro lado, o tempo necessário para restabelecer a circulação ferroviária (tempo de interrupção da circulação) após uma avaria é uma variável aleatória Y com distribuição $\mathcal{N}(3, 0.75)$ (em horas), e também aqui, o tempo de interrupção da circulação após uma avaria é independente dos tempos de interrupção da circulação após outras avarias.

a) Qual o número esperado de avarias num dado mês? E num ano?
b) Qual a probabilidade de o tempo de interrupção da circulação após uma avaria exceder 4.5 horas?
c) Tendo ocorrido duas avarias num mês, qual a probabilidade de o tempo total de interrupção da circulação após as duas avarias ter excedido 8 horas?
d) Caracterize a lei da variável aleatória que designa o tempo total de interrupção da circulação num mês em que ocorram K avarias.

2.83. (*Exame 31.01.2011*) As maçãs colhidas num pomar são classificadas, de acordo com o seu peso, em três categorias: pequenas, médias e grandes. As maçãs pequenas são aquelas cujo peso é inferior a 45 gramas e as grandes aquelas cujo peso excede 75 gramas. Suponha que o peso de uma maçã (em gramas) é uma variável aleatória X, que se admite seguir uma lei normal com valor médio 60 gramas e desvio padrão 15 gramas.

a) Qual a probabilidade de uma maçã escolhida ao acaso ser classificada como grande?
b) O lucro (em cêntimos) da venda de cada maçã está relacionado com o seu peso de acordo com a expressão $L = 12 - X^2/350$. Determine o lucro esperado da venda de cada maçã.
c) Enchem-se sacos com 10 maçãs, seleccionadas ao acaso. Qual a probabilidade de um saco, escolhido ao acaso, pesar mais de 0.5 kg?
d) Num dia em que se colheram 3000 maçãs qual a probabilidade, aproximada, de mais de 450 serem grandes?
e) As maçãs defeituosas vão para sumo. Sabe-se que vão para sumo 2% das maçãs grandes, 5% das médias e 15% das pequenas. Escolhida uma maçã ao acaso qual a probabilidade de ir para sumo?

2.84. Uma pessoa vai diariamente a uma pastelaria tomar o pequeno almoço. Suponha que o tempo de espera para ser atendida é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 4 minutos. Qual a probabilidade de:

a) A pessoa ser atendida em menos de três minutos?
b) Em pelo menos 4 dias de uma semana (considere a semana com 7 dias e o tempo de atendimento independente de dia para dia) a pessoa ser atendida em menos de três minutos?

2.85. Numa indústria alimentar o consumo diário de uma certa matéria prima (em toneladas) é uma variável aleatória com distribuição exponencial de valor médio 2.

a) Qual o valor do consumo diário mediano daquela matéria prima?
b) Qual deve ser o *stock* da matéria prima no início de cada dia de modo que a probabilidade de ruptura de *stock* seja 0.02?
c) Considere de novo a situação da alínea anterior e suponha que a ruptura de *stock* é independente de dia para dia.
   i) Identifique e caracterize a distribuição do número de dias de um mês (30 dias) em que há ruptura de *stock*.

ii) Qual a probabilidade, aproximada, de num mês (30 dias) haver mais de 2 dias com ruptura de *stock*?

2.86. (*Exame 27.01.2014*) O concentrado de tomate é vendido em bisnagas que permitem uma menor redução da exposição ao ar. O diâmetro de abertura destas bisnagas é uma variável aleatória, X, com distribuição normal de parâmetros $\mu = 5$ mm e $\sigma = 0.6$ mm.

a) Calcule a probabilidade de, numa bisnaga escolhida ao acaso, o diâmetro de abertura medir
i) menos de 3.5 mm ii) 5 mm.

b) Considere uma amostra de 100 bisnagas escolhidas ao acaso. Determine a probabilidade de:

i) a média dos diâmetros de abertura ser superior a 5.1 mm.

ii) 3 bisnagas terem diâmetro de abertura inferior a 3.5 mm.

c) O custo (em u.m. adequadas) de fabrico de uma bisnaga depende do diâmetro da abertura e pode considerar-se dado por $C = 20 + 2X$. Caracterize a lei do custo de fabrico de cada bisnaga.

2.87. Uma fábrica dispõe de duas máquinas, que trabalham independentemente, uma a produzir fichas e a outra a produzir tomadas. Sabe-se que o diâmetro de um pino de uma ficha segue uma distribuição normal com valor médio 2.0 mm e desvio padrão 0.03 mm, e que o diâmetro de um orifício de uma tomada segue uma distribuição normal com valor médio 2.04 mm e desvio padrão 0.04 mm. Calcule a probabilidade de:

a) o diâmetro de um pino (de uma ficha) ser superior a 2.01;

b) o diâmetro de um pino (de uma ficha) ser inferior a 2.04, sabendo que é superior a 2.01;

c) o diâmetro de um pino (de uma ficha) ser igual ao diâmetro de um orifício (de uma tomada);

d) um orifício (de uma tomada) ter diâmetro superior ao de um pino (de uma ficha).

2.88. (*Exame 26.01.2015*) A empresa *Sumo-Laranjita* distribui garrafas de 250 ml de sumo de laranja, que são enchidas por uma máquina automática. Contudo nem sempre esta máquina deposita a mesma quantidade de sumo de laranja nas garrafas, havendo ligeiras flutuações. Admite-se que a quantidade de sumo, X, em cada garrafa segue uma distribuicão normal com valor médio igual a 250 ml e desvio padrão 5 ml.

a) Qual a proporção de garrafas com mais de 260 ml de sumo de laranja?

b) A empresa realiza com regularidade uma recolha aleatória de 10 garrafas para controle do processo de enchimento. Determine, justificando, a probabilidade de:

i) A quantidade de sumo nessas 10 garrafas ser inferior a 2.6 litros.

ii) A quantidade média de sumo nas 10 garrafas ser exactamente 250 ml.

iii) Haver nessa amostra 2 garrafas com mais de 260 ml de sumo.

c) A empresa considera que o custo (em cêntimos) de produção de cada garrafa de sumo se pode exprimir como $C = \frac{X^2}{500} - 100$. Determine o custo médio da produção de cada garrafa de sumo.

2.89. (*2º Teste 12.01.2015*) Suponha que por ocasião da época natalícia a produção diária de chocolate, em toneladas, numa dada fábrica segue uma lei normal. Em 50% dos dias verificou-se uma produção superior a 20 toneladas e em 10% dos dias produzem-se menos de 16.8 toneladas.

a) Determine o valor médio e a variância da variável aleatória "produção diária de chocolate" naquela fábrica.

b) Qual a probabilidade de, num dia escolhido ao acaso, a produção diária se afastar do valor médio mais de 5 toneladas?

c) Suponha que um defeito numa das máquinas provoca uma alteração na produção de chocolates, havendo uma diminuição de 2 toneladas na produção diária média, mantendo-se a variância. O que pode dizer sobre a probabilidade da alínea anterior? Justifique.

d) Para o fabrico de chocolates contendo 70% de cacau, a fábrica adquire 110 toneladas de cacau por semana (7 dias). Qual a probabilidade de numa semana haver ruptura de *stock* de cacau?

e) Numa semana de produção (7 dias) qual a probabilidade de haver no máximo 4 dias em que se produzem menos de 16.8 toneladas (considere a produção da fábrica independente de dia para dia)?

2.90. (*Exame 25.01.2016*) Sabe-se que a morte dos indivíduos da espécie *Buteo buteo* (águia de asa redonda) encontrados em campos de forragem e de beterraba sacarina pode estar relacionada com o uso de carbofuran. Numa determinada área geográfica, o estudo da concentração de carbofuran (mg/kg) revelou que 5% dos indivíduos da população apresentavam valores daquela concentração superiores a 3 mg/kg. Admita que a concentração de carbofuran tem distribuição normal de valor médio 1.2 mg/kg.

a) Determine a variância da variável em estudo.

b) Determine os limites do intervalo de concentrações centrado no valor médio que contém 50% dos casos.

c) Seleccionando ao acaso uma amostra de 20 aves, qual a probabilidade de:

   i) A concentração média amostral ultrapassar o valor 2.2 mg/kg?

   ii) Encontrar mais de 4 aves com concentração de carbofuran superior a 3 mg/kg?

2.91. (*Exame 10.01.2017*) A concentração diária de um certo poluente não deve exceder 320 μg/m^3 de acordo com as normas ambientais em vigor. Admita que a concentração deste poluente num dado local tem distribuição normal com valor esperado 300 μg/m^3 e que as concentrações do poluente em dias distintos são independentes. Sabe-se ainda que neste local as normas ambientais não são cumpridas em 2.5% dos dias.

a) Calcule o desvio padrão da concentração do poluente neste local.

Nota: Se não resolveu esta alínea considere, no que se segue, o desvio padrão igual a 10.20 μg/m^3.

b) Determine a probabilidade de, neste local, a concentração diária do poluente
i) estar entre 280 e 300 μg/m^3; ii) ser igual a 320 μg/m^3.

c) Numa semana (7 dias), qual a probabilidade de, neste local,

  i) a concentração diária média deste poluente exceder os 310 μg/m^3?

  ii) serem cumpridas as normas ambientais relativas a este poluente em pelo menos 6 dias?

d) Os valores de concentração diária deste poluente, neste local, vão sendo registados dia após dia. Quantos dias se espera ter de registar até ocorrer o primeiro dia em que as normas ambientais não são cumpridas? Justifique.

e) Num ano (365 dias) e neste local, qual a probabilidade, aproximada, de a concentração diária não cumprir as normas ambientais em 10 ou menos dias?

2.92. (*Exame 10.01.2018*) O número de aviões que aterram, por hora, no período diário de operação num aeroporto de uma pequena cidade segue uma lei de Poisson. Estudos efectuados permitem afirmar que a probabilidade de, numa hora, aterrarem mais de 4 aviões é 0.56.

a) Determine o valor do parâmetro da distribuição.
Nota: Se não resolveu esta alínea considere $\lambda = 5$.

b) Sabendo que numa hora aterraram aviões no aeroporto, qual a probabililidade de nessa hora terem aterrado no máximo 5 aviões.

c) Qual a probabilidade, aproximada, de no período diário de operação (18 h) de um dado dia aterrarem mais de 100 aviões? Justique os seus cálculos.

2.93. (*Exame 25.01.2019*) Admite-se que o peso de uma pêra numa dada central fruteira segue uma distribuição normal com valor médio 140 g e variância 484 g^2.

a) Qual a probabilidade de uma pêra, escolhida ao acaso, pesar mais de 150 g?

b) As pêras são colocadas em caixas cujo peso que se admite seguire uma distribuição normal com valor médio 2 kg e desvio padrão 30 g. No processo de controlo dessa central fruteira, o peso total da caixa com as pêras não pode ultrapassar 12 kg.
Se forem colocadas 70 pêras numa caixa, qual a probabilidade de a caixa não passar no controlo?

Exercícios de Revisão de Introdução à Teoria da Probabilidade

R2.1. (*Exame 7.01.2010*) Sejam E, F e G acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

a) Mostre que se E e F são acontecimentos mutuamente exclusivos se tem $P(\overline{E \cup F}|G) = 1 - P(E|G) - P(F|G)$, para $P(G) > 0$.

b) Se $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.8$ e $P(G) = 0.4$ podem os três acontecimentos constituir uma partição de Ω? Justifique.

R2.2. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

a) Defina os seguintes conceitos "os acontecimentos A e B são independentes" e "os acontecimentos A e B são mutuamente exclusivos".

b) Se A e B são acontecimentos tais que $P(\overline{A}) = 0.8$, $P(B) = \alpha$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6$, determine α de modo que:

   i) A e B sejam independentes;

   ii) A e B sejam mutuamente exclusivos.

c) Prove que:

$$P(\overline{A} \cup (B \cap \overline{A})) + P(A \cup (B \cap \overline{A})) = 1 + P(B \cap \overline{A}).$$

R2.3. Um vendedor de bolbos prepara encomendas a partir de 3 lotes de bolbos que, por terem idades diferentes, não apresentam a mesma probabilidade de germinação. A probabilidade de germinação de um bolbo é de 0.80 se pertence ao lote A, de 0.85 se pertence ao lote B e de 0.90 se pertence ao lote C.

a) i) Qual a probabilidade de germinação de um bolbo retirado ao acaso de um lote escolhido ao acaso?

   ii) Retirou-se um bolbo ao acaso de um lote escolhido ao acaso e verificou-se que não germinava. Qual a probabilidade de o bolbo ter sido retirado do lote C?

b) Se uma encomenda for constituída por um bolbo (retirado ao acaso) de cada lote, qual a probabilidade de pelo menos dois bolbos germinarem, admitindo a independência de germinação entre os bolbos retirados de lotes diferentes?

R2.4. Considere A, B e C acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

a) Seja 1/4 a probabilidade de pelo menos um dos acontecimentos B ou C ocorrer.

   i) Qual a probabilidade de nenhum dos dois acontecimentos ocorrer?

   ii) Sabendo que $P(A|(B \cup C)) = 0.3$ e $P(A|\overline{(B \cup C)}) = 0.7$, calcule $P(A)$.

   iii) Qual a probabilidade de pelo menos um dos dois acontecimentos B ou C ocorrer, sabendo que A ocorreu?

b) Mostre que se A e B são independentes, A e C são independentes e B e C são mutuamente exclusivos, então A e $B \cup C$ são independentes.

R2.5. Um organismo estatal recorre a imagens de satélite para monitorizar a ocorrência de incêndios. Para tal, para cada parcela de terreno (que pode estar ardida ou não) é calculado um determinado índice a partir da informação adquirida pelo sensor do satélite. O valor deste índice pode ser considerado uma v.a. que no caso de parcelas não ardidas se admite ter distribuição normal de valor médio 2 e desvio padrão 5 e para parcelas ardidas se admite ter distribuição normal de valor médio 8 e desvio padrão 3.

Quando o sensor calcula um valor para o índice superior a 5, a parcela é registada pelo sensor como ardida.

Considere que a proporção total de parcelas ardidas é 6%.

a) Qual é a probabilidade de, numa parcela ardida, o sensor calcular um valor do índice superior a 5?

b) Qual a probabilidade de uma parcela escolhida ao acaso ser registada pelo sensor como ardida?

c) Para uma parcela escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ser tomada uma decisão errada (o sensor registar como ardida uma parcela e ela não estar ardida ou o sensor registar como não ardida a parcela e ela estar ardida)?

R2.6. Responda, **justificando convenientemente**, se são verdadeiras ou falsas as afirmações nas seguintes alíneas.

a) Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

   i) Se $A \cup B$ se realiza, então A também se realizou.

   ii) $P(A - B) \leq P(A)$.

   iii) Se A e B são mutuamente exclusivos, então $P(A|(A \cup B)) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

b) Seja X uma variável aleatória com função distribuição cumulativa F.

   i) Se $a > 0$, $F(x) \leq F(x+a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   ii) Se $X \frown Geo(p)$, $0 < p < 1$, então $P[X \leq 1|X \leq 2] = 1/q$, sendo $q = 1 - p$.

R2.7. Uma empresa seguradora tem ao balcão dois vendedores de seguros de vida. A experiência tem revelado que 50% das pessoas que contactam o vendedor A e apenas 25% das pessoas que contactam o vendedor B fazem um seguro de vida. Considere o par aleatório (X,Y) que representa o número de apólices vendidas diariamente por A e B num dia em que cada vendedor atende 2 pessoas.

a) Admitindo que que cada pessoa contactou um só vendedor, determine a distribuição de probabilidades conjunta do par aleatório (X,Y).

b) Qual a probabilidade de se vender pelo menos um seguro de vida?

c) Qual a probabilidade de A vender pelo menos um seguro de vida sabendo que B vendeu dois seguros?

d) Calcule $E(X+Y)$ e $Var(X)$.

R2.8. Sejam X e Y variáveis aleatórias.

a) Defina $Var[X]$ e prove que $Var[b+X] = Var[X]$ com $b \in \mathbb{R}$.

b) Seja X uma v.a. discreta com distribuição de probabilidade $(x_i, p_i),\ i = 1, \ldots, n$. Defina $E[X]$ e prove que $E[b+X] = b + E[X]$ com $b \in \mathbb{R}$.

c) Se $X \frown Poisson(2)$ e $Y \frown Poisson(3)$, independentes, mostre que $X+Y \frown Poisson(5)$.

R2.9. Suponha que a dureza X e a perda abrasiva Y de um dado bloco de material, expressas em unidades adequadas, são variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta assim definida

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy + y & \text{se} \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{R}$$

a) Determine k.

b) Mostre, justificando, que as variáveis X e de Y são independentes.

c) Determine a perda abrasiva esperada de um bloco de material, se a sua dureza é de 0.4. Justifique.

R2.10. Seja X o tempo total desde a chegada de um cliente a uma estação de serviço até ao momento em que faz o pagamento, e seja Y o tempo que está em fila até efectuar o pagamento (medidos em unidades de 5 minutos). Suponha que as variáveis (X,Y) têm função densidade de probabilidade conjunta assim definida:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x/2)e^{-x} & \text{se } 0 \le y \le x \\ 0 & \text{para outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

Sugestão: sempre que necessário pode utilizar o seguinte resultado

$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!, n \in \mathbb{N}_0.$

a) Calcule as funções densidade marginais de X e Y.

b) Calcule o tempo médio de serviço. Qual a variância do tempo de serviço.?

c) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

R2.11. A concentração (em ppm) de monóxido de carbono (CO) na atmosfera, numa determinada zona urbana, no período das 8h às 10h, pode ser considerada uma variável aleatória X com a seguinte função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 3.4e^{-3.4x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

a) Determine a função distribuição cumulativa de X.

b) Qual é a probabilidade de, numa amostra recolhida ao acaso naquele período, a concentração de CO exceder 2 ppm?

c) Mostre que a função geradora de momentos de X é

$$M_X(t) = \frac{3.4}{3.4 - t} \text{ para } t < 3.4.$$

d) Determine as concentrações média e mediana de CO naquele período.

R2.12. Considere a variável aleatória X com a seguinte função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{restantes valores de } x. \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

a) Determime o valor de α para o qual $E[X] = 2/3$.

b) Determine a função distribuição cumulativa de X.

c) Determine o valor de m tal que $P[X < m] = P[X > m]$.

d) Seja Z uma variável aleatória, independente de X, com distribuição normal reduzida.

i) Determine a função densidade conjunta do par aleatório (X,Z).

ii) Determine $P[Z > 1 | X < \frac{1}{2}]$.

iii) Determine o valor esperado e a variância de $X - Z^2$.

R2.13. Seja X uma variável aleatória que designa o tempo de vida (em anos) de organismos de uma dada população e Y um índice, comprendido entre 0 e 1, que exprime a velocidade de envelhecimento. Suponha que X e Y têm função densidade de probabilidade conjunta assim definida:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2ky\, e^{-x} & \text{se } x > 0 \text{ e } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante k.

b) Determine as densidades marginais de X e de Y. Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique.

c) Qual a probabilidade de um organismo daquela população viver mais de 2 anos se o seu índice de envelhecimento é igual a 0.8?

d) Qual a probabilidade de um organismo daquela população ter um índice de envelhecimento igual a 0.5?

R2.14. Considere a v.a. discreta, X, com a seguinte distribuição de probabilidade

x_i	-1	0	1
p_i	0.2	0.3	0.5

a) Chama-se momento de ordem k de uma v.a. X a $E[X^k]$, caso exista. Calcule os momentos de ordem 1, 2 e 3 da v.a. X. Determine $Var[X]$.

b) Considere Y outra v. a. discreta, independente de X, tal que
$P[Y = 0] = 0.3$ e $P[Y = 1] = 0.7$.

i) Determine a distribuição de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y).

ii) Deduza a distribuição de probabilidade da v.a. $D = |X-Y|$.

R2.15. Dois estudantes A e B combinaram encontrar-se entre as 9h e as 10h para estudarem juntos. Sejam X e Y as horas de chegada do estudante A e B, respectivamente, ao local de encontro. Considerando que X e Y são variáveis aleatórias independentes com funções densidade, respectivamente

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(x-9) & 9 \le x \le 10 \\ 0 & \text{restantes valores de } x \end{cases}$$

e

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 9 \le y \le 10 \\ 0 & \text{restantes valores de } y \end{cases}$$

a) Determine a função distribuição cumulativa de Y.

b) Determine a função densidade conjunta do par aleatório (X,Y).

c) Qual a probabilidade de ambos os estudantes chegarem entre as 9h e as 9h30?

d) Determine a probabilidade de o estudante A chegar antes do estudante B.

e) Qual a probabilidade de o estudante A chegar exactamente às 9h30?

f) Sabendo que o estudante A chegou às 9h15, qual a probabilidade do estudante B ter chegado antes dessa hora?

R2.16. (*Exame 12.01.2009*) Para avaliar uma determinada doença em perus efectuam-se dois testes. Designe-se por X e Y as v.a.'s associadas aos resultados de cada um dos testes. Sabe-se que aqueles testes dão resultado positivo (valor 1) ou negativo (valor 0) com as probabilidades indicadas na tabela seguinte. O valor da constante a varia consoante a gravidade da doença.

X \ Y	0	1
0	1/4-a	1/4+a
1	1/4	1/4

a) Quais os valores possíveis para a?

b) Determine a função distribuição cumulativa de X.

c) Para que valor(es) de a são as variáveis aleatórias independentes?

d) Determine a função massa de probabilidade de $Y|X=1$.

R2.17. (*Exame 7.10.2010*) Um inquérito realizado a um grande número de casais com dois ou menos filhos conduziu à seguinte distribuição de probabilidade conjunta para (X,Y), onde X representa a faixa etária média do casal ($X=1$ $\rightarrow$ menos de 25 anos; $X=2 \rightarrow$ 25 anos ou mais) e Y representa o número de filhos:

X \ Y	0	1	2
1	0.15	a	0.05
2	b	0.4	c

a) Complete a tabela sabendo que $P[X=1]=0.3$ e $E[Y]=0.8$.

b) Determine a distribuição de probabilidade da faixa etária média do casal, para os casais com 1 filho.

c) Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique.

R2.18. (*Exame 22.01.2009*) Considere-se um sistema eléctrico constituído por 100 componentes que funcionam de forma independente. Cada componente tem uma duração de vida (em anos) que é descrita por uma variável aleatória X com função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{restantes valores.} \end{cases}$$

a) Determine a função distribuição cumulativa de X.

b) Determine o tempo mediano de vida de um componente.

c) Calcule a probabilidade de um componente ter uma duração de vida superior a 3 anos.

d) Qual a probabilidade de um componente durar pelo menos 4 anos sabendo que está a funcionar há pelo menos 1 ano? Comente o resultado obtido, caracterizando a lei da v.a. X.

e) Calcule, aproximadamente, a probabilidade de a duração média de vida das 100 componentes ser superior a 3 anos.

R2.19. Na época natalícia, certa pastelaria fabrica 3 tamanhos de bolo-rei: de 500 g, de 750 g e de 1000 g. Nem todos os bolos fabricados contêm brinde. Este é colocado de tal forma que 20% dos bolos de 500g ficam sem brinde, o mesmo sucedendo com 10% dos bolos de 1000 g e com 30% dos bolos de 750g. 25% dos bolos fabricados são de 500g e outros 25% de 1000g.

a) Qual a probabilidade de um bolo sem brinde ser de 750 g?

b) A filha de um casal seu amigo apareceu-lhe com um brinde que lhe saíu no bolo-rei comprado na referida pastelaria. Qual dos bolos (tamanho) tem maior probabilidade de ter sido comprado pelo casal?

c) A referida pastelaria tem uma produção diária de 1000 bolos. Qual a probabilidade de uma pessoa que compra 10 desses bolos ter pelo menos 2 com brinde?

R2.20. Considere uma empresa agrícola que produz uvas e melões nas quantidades (em toneladas) X e Y, respectivamente. Devido às instáveis condições atmosféricas o valor das produções é aleatório com f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(1-x)(2-y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores.} \end{cases}$$

a) Calcule k.

b) Se num dado momento a produção de melões for de 1 t, qual será a f.d.p. da produção de uvas?

c) Será que as quantidades produzidas de cada fruta são independentes? Justifique.

d) Escolhendo ao acaso 20 empresas nas condições anteriores, qual será a probabilidade de, em pelo menos 5 delas, a produção de uvas ser superior a 800 kg?

R2.21. Um laboratório exporta um certo produto químico para o mercado europeu. Este mercado exige que o produto fornecido tenha entre outras características, uma determinada coloração. Da produção do laboratório, 60% tem a coloração adequada, mas apenas metade desta quantidade satisfaz também as outras condições exigidas pelo referido mercado.

a) Qual a percentagem da produção do laboratório que satisfaz as condições exigidas pelo referido mercado ?

b) De um lote de 100 produtos em que 30 não estão em condições de exportação, retirou-se uma amostra de 10, sem reposição. Calcule a probabilidade de aparecer pelo menos um produto que não seja exportável.

R2.22. Numa linha de fabrico de uma determinada componente electrónica pode ocorrer um defeito muito raro mas causador de grandes prejuízos. Seja 0.01 a probabilidade de ocorrência desse defeito. Um teste muito simples é realizado para detecção do defeito. Apresenta, no entanto, probabilidades significativas de conduzir a conclusões erradas. Assim, cerca de 5% das vezes o teste indica a existência de defeito se não houver defeito e cerca de 3% das vezes indica ausência de defeito se houver defeito.

a) Qual a probabilidade de se ter uma conclusão incorrecta?

b) Determine a probabilidade de o teste indicar a existência de defeito.

c) São comercializadas embalagens contendo 80 daquelas componentes. Qual a probabilidade de, numa determinada embalagem, duas componentes apresentarem defeito?

d) A venda de cada embalagem referida na alínea anterior para o mercado é feita com um lucro Y , que é função de vários factores entre os quais o número de componentes defeituosas. Com o objectivo de simplificar os cálculos considere constante o efeito de todos os outros factores, sendo o lucro dado pela relação

$$Y = 0.02 - 0.1X$$

onde X é o número de componentes defeituosas em cada embalagem. Qual é nessa situação, a probabilidade de uma embalagem não dar prejuízo?

R2.23. Em certo bairro recentemente construído e constituído por prédios de duas, três ou quatro assoalhadas, verificou-se que em 37% dos apartamentos os moradores não têm filhos. A distribuição dos apartamentos por número de assoalhadas é a seguinte:

Nº de assoalhadas	2	3	4
Percentagem	30%	40%	30%

a) Determine a média e a variância do número de assoalhadas de um apartamento.

b) Admitindo que o número de filhos por apartamento tem uma distribuição de Poisson, determine a probabilidade de num certo apartamento haver pelo menos cinco filhos.

c) Sabendo que dos moradores em apartamentos de duas assoalhadas apenas 20% têm pelo menos um filho e que nos de três assoalhadas 30% não têm filhos, qual a probabilidade de num apartamento de 4 assoalhadas escolhido ao acaso haver pelo menos um filho.

R2.24. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias com distribuição de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Prove que se X_1 e X_2 forem independentes, a distribuição de $X_1|(X_1+X_2=k), \quad k \in \mathbb{N}$, é binomial.

R2.25. Um aviário embala os ovos que produz em três tipos de caixas, com capacidade para 6 ovos. Ao chegarem ao local de venda algumas caixas contêm ovos partidos. Sejam X, Y e W variáveis aleatórias que designam, respectivamente, o número de ovos partidos numa caixa de esferovite, plástico e cartão. Admite-se que X, Y e W têm as seguintes distribuições:

i	0	1	2	3	4	5	6
$P[X=i]$	0.73	0.17	0.07	0.03	0	0	0
$P[Y=i]=P[W=i]$	0.58	0.23	0.10	0.05	0.02	0.01	0.01

a) Determine a probabilidade de uma caixa de esferovite ter pelo menos um ovo partido.

b) Qual o valor esperado e a variância do número de ovos partidos numa caixa de esferovite?

c) Determine a probabilidade, aproximada, de o número total de ovos partidos em 100 caixas de esferovite ser superior a 50.

d) Pretende-se adquirir 30 embalagens de ovos em caixas de cartão. Qual a probabilidade de haver mais do que uma caixa com todos os ovos partidos?

e) Diariamente, 20% dos ovos produzidos são colocados em caixas de esferovite, 30% em caixas de plástico e os restantes 50% em caixas de cartão. Adquirida uma caixa ao acaso da produção diária deste aviário, determine a probabilidade dos acontecimentos:

   i) a caixa não ter nenhum ovo partido.

   ii) a caixa ser de cartão, tendo-se verificado que não tem ovos partidos.

R2.26. Para efeitos de comercialização, um dado fruto é classificado de acordo com o seu tamanho. Considera-se que o diâmetro de uma peça deste fruto é uma variável aleatória com distribuição normal de desvio padrão igual a 5 cm e média μ cm. A classificação, em categorias, do referido fruto é a seguinte:

Categoria	Diâmetro (X) em cm
C1	$X \leq 6$
C2	$6 < X < 12$
C3	$X \geq 12$

a) Sabendo que 30% dos frutos são da categoria C3, calcule o diâmetro médio dos frutos e a percentagem dos frutos das outras categorias.

b) Se os frutos forem vendidos em embalagens de 6 unidades, qual a probabilidade de uma embalagem ter pelo menos 2 frutos da categoria C3?

c) Sabendo que 10%, 8% e 2% dos frutos pertencentes respectivamente às categorias C1,C2 e C3 se apresentam em más condições, qual a probabilidade de um fruto retirado ao acaso não estar em condições de ser consumido?

R2.27. O número de peixes pescados por dia por um pescador é uma v.a. com distribuição de Poisson com média 10. Admita que o número de peixes pescados é independente de dia para dia.

a) Determine a probabilidade de, num dado dia, o pescador pescar 2 peixes.

b) Qual a probabilidade aproximada de numa semana (7 dias) o número total de peixes pescados ser superior a 80?

c) Num ano de pesca (365 dias), qual a probabilidade aproximada de haver pelo menos 3 dias em que são pescados 2 peixes em cada dia?

R2.28. O tempo de vida em horas de uma peça é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 1000. Determine a probabilidade de:

a) Uma peça estar ainda em funcionamento ao fim de 800 horas.

b) Uma peça durar pelo menos 900 horas, sabendo que já está a funcionar há pelo menos 100 horas. Interprete o resultado.

c) Num lote de 100 peças escolhidas ao acaso, o tempo médio de vida dessas peças ser inferior a 980 horas (Admita que o tempo de vida é independente de peça para peça).

R2.29. Um artesão executa peças de barro, sendo o tempo de execução uma variável aleatória X com distribuição exponencial de valor esperado 2 horas.

a) Determine a função distribuição cumulativa de X.

b) Qual a probabilidade de uma peça levar pelo menos 1h 30m a ser executada?

c) Verificando-se que em certo momento uma peça já está a ser produzida há 30m, qual a probabilidade de ser necessário esperar pelo menos mais 1h 30m para concluir a peça? Comente relacionando com o resultado da alínea anterior.

d) O artesão mantém os registos do tempo de execução de cada peça. Seis peças foram escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade de nenhuma ter levado mais de 1h e 30m a ser executada?

e) Num dia em que não havia qualquer peça em stock foi aceite uma encomenda de 100 peças, tendo o artesão assumido o compromisso de fornecer as peças no prazo máximo de 30 dias (o que corresponde a 240 horas de trabalho). Qual a probabilidade de ele cumprir o seu compromisso? Justifique.

R2.30. Numa fábrica de rações produz-se diariamente 100 unidades de um dado tipo de ração. A quantidade de uma certa matéria prima incorporada em cada unidade é uma variável aleatória de valor médio 75g e variância 25g^2. Admita a independência entre as quantidades de matéria prima necessárias para cada unidade.

a) Qual a probabilidade, aproximada, de a quantidade média de matéria prima por unidade, usada num dado dia, ser superior a 74g?

b) Determine a percentagem, aproximada, de dias em que a quantidade de matéria prima usada não excede 7.6kg.

c) Fazem-se lotes de 100 unidades de ração. Sabe-se que o custo da matéria prima é de 5 cêntimos/g. Qual deve ser o valor a pedir na venda de cada lote de modo a cobrir o custo da matéria prima em 95% das situações?

R2.31. O diâmetro de um certo tipo de peças é uma variável aleatória com distribuição normal. As peças são consideradas defeituosas se o seu diâmetro diferir do valor médio μ mais do que 1.25 mm. Sabe-se que 2.28% das peças possuem um diâmetro superior a 7 mm, sendo também esta percentagem a das peças com um diâmetro inferior a 5 mm.

Tendo-se extraído uma amostra de 100 peças de um grande lote, qual a probabilidade de aparecerem pelo menos 5 peças defeituosas.

R2.32. Seja T uma variável aleatória que representa a duração até falhar (tempo de vida) de uma componente. Chama-se <u>fiabilidade da componente no tempo t</u> ao valor $R(t) = P[T > t]$, i.e., à probabilidade de a componente não falhar durante o tempo t.

a) Exprima a derivada da fiabilidade em função de f, função densidade de probabilidade da variável aleatória T.

b) A distribuição do tempo de vida de uma lâmpada de um certo tipo é exponencial e a sua fiabilidade para o período de 72 horas é 95%.

   i) Qual é o tempo médio de vida de uma lâmpada daquele tipo?

   ii) Sabendo que uma determinada lâmpada não falhou durante as primeiras 72 horas de funcionamento, calcule a probabilidade de a mesma lâmpada não falhar nas 72 horas seguintes.

   iii) Considerando que se dispõe de uma amostra aleatória de 50 lâmpadas, qual a probabilidade, aproximada, de a sua duração média ser superior a 1600 horas?

R2.33. Duas empresas, A e B, fazem a abertura de furos para captação de água numa dada região. A empresa A cobra 3500€ por furo, independentemente da sua profundidade. A empresa B cobra 1000€ mais 25€ por cada metro de profundidade do furo. Na região em questão, a profundidade dos furos segue uma distribuição normal com média 75 m e desvio padrão 12 m e a profundidade é independente de furo para furo.

a) Ao realizar um furo na referida região, qual é a probabilidade de este ter uma profundidade:

   i) superior a 90 m?

   ii) igual a 90 m?

b) Caracterize, justificando, a distribuição dos preços, P_A e P_B da empresa A e B respectivamente. Qual é o preço médio de um furo realizado pela empresa B?

c) Qual é a probabilidade da empresa A cobrar mais do que a empresa B pela abertura de um furo?

d) Sabendo que a empresa B abriu 10 furos num dado mês, qual a probabilidade de o preço de abertura desses furos ter sido superior ao valor que a empresa A cobraria se fosse ela a abrir os furos?

R2.34. (*Exame 25.01.2010*) Uma escola tem rapazes e raparigas de 18 anos na razão 3:1, respectivamente. Aos 18 anos a altura dos rapazes segue uma distribuição normal de valor médio 175 cm e desvio padrão 10 cm enquanto a altura das raparigas segue uma distribuição normal de valor médio 165 cm e desvio padrão 10 cm .

a) Qual a probabilidade de uma rapariga, escolhida ao acaso, ter altura superior a 170 cm?

b) Qual a probabilidade de um aluno qualquer (rapaz ou rapariga), escolhido ao acaso, ter altura superior a 170 cm?

c) Verificou-se que um aluno escolhido ao acaso tinha altura superior a 170 cm. Qual a probabilidade de ser rapariga?

d) Pretende-se seleccionar 10 raparigas para um campeonato de voleibol. Qual a probabilidade de a média das alturas ser superior a 170 cm?

R2.35. (*Exame 25.01.2016*) Uma fábrica de peças para programadores de rega pretende controlar a qualidade da sua produção em série, inspeccionando 10 peças retiradas ao acaso de hora a hora, da produção dessa hora. Se for encontrada pelo menos uma peça defeituosa a produção é interrompida e o processo é examinado para detectar a causa da anomalia. Admita-se que a fábrica está a produzir 1% de peças defeituosas.

a) Qual a probabilidade de o processo não ser interrompido?

b) Quantas peças deveriam ser inspeccionadas (em vez de 10) de modo que, com uma probabilidade de 0.95, o processo seja interrompido?

c) A fábrica trabalha 8h por dia, 5 dias por semana. Qual a probabilidade de mais de 10 peças testadas durante uma semana serem consideradas defeituosas?

d) Suponha que se decide fazer o controle da qualidade da produção em série de outro modo: num dado dia de produção vão-se inspeccionando as peças à medida que vão sendo produzidas. Quantas peças espera observar até encontrar a 1ª defeituosa? Justifique.

R2.36. O peso médio dos indivíduos duma certa espécie de bivalves é 31 g e o respectivo desvio padrão é 2.4 g. Recolhe-se uma amostra aleatória de 100 indivíduos desta espécie.

a) Qual a probabilidade, aproximada, de a média da amostra ser inferior a 30 g?

b) Qual a probabilidade, aproximada, de a média da amostra estar compreendida entre 30 e 31 g?

c) Qual a probabilidade, aproximada, de o peso total da amostra ser superior a 3150 g?

R2.37. O tempo de duração T, em minutos, de uma chamada telefónica é uma variável aleatória com distribuição exponencial padrão. O custo, em euros, de cada chamada $C(T)$, função da duração, é dado por

$$C(T) = \begin{cases} 0.2 & 0 < T \leq 3 \\ 0.2 + 0.6(T-3) & T > 3 \end{cases}.$$

Determine o custo médio de cada chamada.

R2.38. Responda, **justificando convenientemente**, se são verdadeiras ou falsas as afirmações nas seguintes alíneas.

a) Seja X uma variável aleatória.

i) Se $X \frown Poisson(3)$ então $P[2 < X < 3] = 0$.

ii) Se $X \frown \mathcal{N}(0,1)$ então $P[X = 0] = 1/2$.

iii) Seja $X \frown \mathcal{N}(0,1)$ e $Y = 2X$. Então $Y \frown \mathcal{N}(0,4)$.

b) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de dimensão n, proveniente de uma população X com valor médio μ e variância σ^2. Seja $\overline{X}$ a média da amostra aleatória.

i) Se $X \frown Bernoulli(p)$ então $n\overline{X} \frown B(n,p)$.

ii) $E[\mu] = \overline{X}$.

iii) $\overline{X} \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

R2.39. (*Exame 27.01.2014*) Seja X uma variável aleatória contínua com função distribuição cumulativa assim definida:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < b \\ 1 - \dfrac{b}{x^2} & \text{se } x \geq b, \end{cases}$$

com $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Determine, justificando, o valor de b. Esboce o gráfico da função distribuição cumulativa.

b) Determine a função densidade de probabilidade da v.a. X.

c) Define-se um par de variáveis aleatórias discretas (U,V) do seguinte modo:

- $U = 0$ se $X > 2$ e $U = 1$, caso contrário;
- V v.a. uniforme discreta tomando os valores 0 e 1;
- sabe-se que $P[U = 0|V = 1] = 1/2$.

i) Construa a distribuição de probabilidade conjunta do par (U,V).

ii) As variáveis aleatórias U e V são independentes? Justifique.

iii) Determine:
$P[V = 1|U = 0]$; $\quad$ $P[U + V \leq 1]$; $\quad$ $E[UV]$.

R2.40. Suponha que nos casais em que ambos estão empregados, se pode admitir que a distribuição de probabilidade conjunta do salário (em euros) da mulher (X) e do homem (Y) é a apresentada no seguinte quadro:

X \ Y	1000	1500	2000
500	0.05	0.1	0.15
1000	0.1	0.2	0.1
1500	0.15	0.1	0.05

a) Num casal escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de os salários do homem e da mulher serem iguais?

b) Determine as distribuições de probabilidade marginais.

c) Haverá independência entre os salários do homem e da mulher? Justifique.

d) Qual é o valor médio e a variância do salário de um casal?

e) Num casal em que o homem ganha 1000 euros, qual é a probabilidade de a mulher ganhar tanto ou mais do que o homem?

f) Determine a distribuição de probabilidade do salário de um casal.

R2.41. (*Exame 26.01.2018*) Suponha M1 e M2 duas máquinas que funcionam independentemente e sejam X e Y variáveis aleatórias que representam o número diário de avarias de M1 e M2, respectivamente. Sabendo que:

- a máquina M1 nunca avaria mais do que uma vez por dia, e a máquina M2 avaria, no máximo, duas vezes por dia;
- a probabilidade de M1 não avariar é 0.7;
- a probabilidade de M2 não avariar é 0.5 e a de avariar duas vezes é 0.3.

a) Construa a tabela de probabilidades conjuntas e marginais associada ao par aleatório (X,Y).

b) Qual a probabilidade de, num dado dia, o número de avarias da máquina M2 ser superior ao número de avarias da M1?

c) Fizeram-se observações sobre o funcionamento diário da máquina M1. Admita que quando ocorre uma avaria é imediatamente detectada, corrigida e a sua ocorrência independente de dia para dia.

   i) Qual a probabilidade, aproximada, de em 2 meses (60 dias) se terem verificado mais de 35 dias sem avarias? Justifique convenientemente.

   ii) Quando a máquina M1 foi instalada começou a registar-se diariamente a ocorrência de avaria. Qual a probabilidade de M1 ter avariado, pela primeira vez, após 5 dias de instalação?

Soluções de alguns Exercícios – Capítulo 2

2.1. $P(A\cap B)=0.2$; $P(A-B)=0.2$; $P(\bar{A}-B)=0.4$; $P(A\cup\bar{B})=0.6$

2.2. $A\cup B=\{t\in\mathbb{R}^+ : 2<t<10 \vee t>15\}$; $A\cap C=\emptyset$; $A\cap\overline{B}=A-B=A$; $(A\cup B)\cap\overline{C}=A$; $\overline{A}\cup(B\cap C)=\overline{A}$

2.5. a) $P(B)=0.4$

b) $P(B)=0.2$

2.6. a) 0.1

2.7. a) 0.25.

b) 0.85.

c) 5/6.

2.8. A- Acontecimento "atleta 1 percorre 100 m em menos de 10 s"

B- Acontecimento "atleta 2 percorre 100 m em menos de 10 s"

C- Acontecimento "atleta 3 percorre 100 m em menos de 10 s"

Pede-se $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

ou $P(A\cup B\cup C)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=\frac{78}{150}=0.52$

2.11. a) $P(C|B)=0.4615$.

b) $P[(B\cap C)|A]=0.12$.

c) São não independentes.

2.13. a) Os acontecimentos A,B e C constituem uma partição de Ω se e somente se:
$A\cap B=\emptyset$; $A\cap C=\emptyset$; $B\cap C=\emptyset$ e $A\cup B\cup C=\Omega$.

b) $P(F|C)=0.6$

2.15. a) 0.34

b) 0.53

c) 0.18

2.17. a) 0.135

b) 0.667

c) Designando por G - "doença na forma grave" e RP - "resultado positivo", tem-se $P(G)=0.06$, $P(RP)=0.135$ e $P(G\cap RP)=0.06$, logo não há independência.

2.18. a) 0.325

b) ≈ 0.764

2.19. a) 0.35

b) 0.25

c) 0.45

2.20. a) 0.08

b) 0.1304

2.21. a) 0.025

b) 0.24

c) 9.9% dos copos

2.22A. a) 0.00099

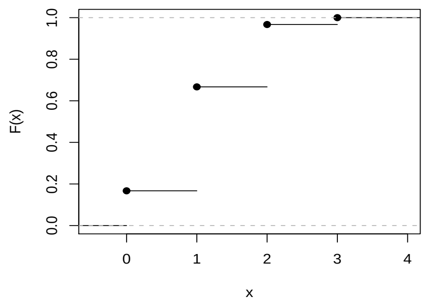
b) 0.09175

c) 0.001119

2.23. a)

x_i	0	1	2	3
p_i	0.167	0.500	0.300	0.033

c)



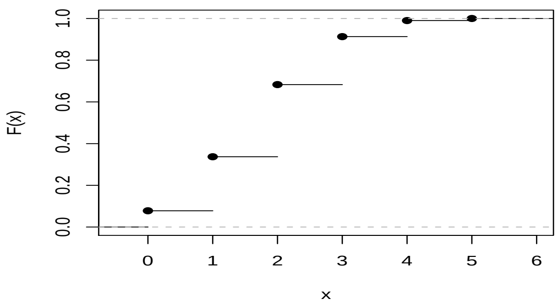
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.167 & 0 \leq x < 1 \\ 0.667 & 1 \leq x < 2 \\ 0.967 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

d) 0.833.

2.24. a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.0778	0.2592	0.3456	0.2304	0.0768	0.0102

b)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.0778 & 0 \leq x < 1 \\ 0.3370 & 1 \leq x < 2 \\ 0.6826 & 2 \leq x < 3 \\ 0.9130 & 3 \leq x < 4 \\ 0.9898 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5. \end{cases}$$

c) 0.8352.

2.25. a) Com reposição:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.00007	0.00123	0.01000	0.04668	0.13614	0.25412	0.29647	0.19765	0.05765

$E[X] = 5.6$; $Var(X) = 1.68$.

b) Sem reposição:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.00001	0.00029	0.00454	0.03374	0.13179	0.28115	0.32332	0.18475	0.04042

$E[X] = 5.6$; $Var(X) = 1.38$.

2.26. a) $E[X] = 0.3 \quad Var(X) = 2.01$.

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.1 & -2 \leq x < -1 \\ 0.4 & -1 \leq x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 0.7 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

c) $3/7$.

d)

$y_i = x_i{}^2$	0	1	4
$P[Y = y_i]$	0.1	0.5	0.4

2.27. a)

x_i	0	1	2	3	4
$P[X = x_i])$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

b) ≥ 3

c) $D = |X - 2|$

d_i	0	1	2
$P[D = d_i]$	0.2	0.6	0.2

2.28. a) $p = 1/6$ e $k = 1$.

b) $8/9$.

c) $Y = X^2 - 2$

y_i	-2	-1	2
$P[Y = y_i]$	$3/6$	$2/6$	$1/6$

2.30. a) $a = 3$.

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

c) $\sqrt[3]{0.5}$

d) $\sqrt[3]{0.95}$.

2.32. a) Se X é v.a. contínua então terá que ter-se $F(x)$ contínua
$\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to 2^-} F(x) = 1$, isto é,
$a.0 + b = 0$ e $a \times 2 + b = 1 \Rightarrow b = 0$ e $a = \dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \chi_{0.25} = \dfrac{1}{2}$.

d) $P\left[X < 1 | X \geq \dfrac{1}{2}\right] \dfrac{P[\frac{1}{2} \leq X < 1]}{P[X \geq \frac{1}{2}]} = \dfrac{1}{3}$

e) i) $E(X) = 1$; $Var[X] = \dfrac{1}{3}$

ii) $\dfrac{\log(2)}{2}$, 5, $\dfrac{4}{3}$ e 3

2.33. a) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/2 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1/2 & 1 \leq x < 1.5 \\ 1 & x \geq 1.5. \end{cases}$

b) $P[X > 1 | X > 1/2] = 4/7$

c) $E[X] = 23/24$ centenas de kg, i.e., o valor médio é aprox. 95.93 kg. A mediana M é tal que $F(M) = 1/2 \Leftrightarrow M = 1$. Portanto a mediana é 100kg.

d) i) $E[Y] = 275/12$

ii) $P[Y \geq 0] = 7/8$.

2.35. a) $b = 3$.

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$.

c) $\chi_{0.5} = \dfrac{3}{2}$.

d) $E[Y] = C_0 + C_1\left(\dfrac{3}{2}\ln 3\right)$.

2.37. a) $a = 2$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^4+x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

c) $P[X > 1/4|X < 1/2] = \frac{F(1/2)-F(1/4)}{F(1/2)}$

e) i) $f(y) = \begin{cases} \frac{y^3+2y}{8} & \text{se } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{o. v. de } y \end{cases}$.

ii) $P[Y > 1] = 27/32$

iii) $Cov[X,Y] = 2Var[X]$

2.38. a)

y_j	0	1	2	3
$p_{.j}$	0.3	0.4	0.2	0.1

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 0.3 & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 0.7 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 0.9 & \text{se } 2 \leq y < 3 \\ 1 & \text{se } y \geq 3 \end{cases}$

b) $a = 0.18$ e $b = 0.1$.

c) $E[Y|X \geq 2] = 29/15$

d) Por definição as variáveis aleatórias X e Y são independentes se e só se $p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j} \quad \forall(i,j)$ Mas a igualdade falha, por exemplo em (1,4). A independência de X e Y não depende de a; X e Y não são independentes.

2.39. a)

y_j	6	7	8	9	10
$p_{.j}$	0.25	0.2	0.2	0.25	0.1

b) As v.a.'s discretas X e Y são independentes sse $\forall(i,j)\ p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$. Observe-se, por exemplo, que $p_{11} \neq p_{1.}\ p_{.1}$, pois $p_{11} = P[X = 2, Y = 6] = 0.05$, $p_{1.} = P[X = 2] = 0.25$ e $p_{.1} = P[Y = 6] = 0.25$, portanto X e Y não são independentes.

c) $E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 3 + 7.75 = 10.75$.

d) Designemos por W a variável $(X|Y = 7)$. A distribuição de probabilidades de W é

w_i	2	3	4
$P[W = w_i]$	0.2	0.5	0.3

2.40. a) $P(X+Y \leq 2) = 0.08$

b) $P(X = Y) = 0.13$

c) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0.1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0.6 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ e $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ 0.1 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 0.3 & \text{se } 2 \leq y < 3 \\ 0.7 & \text{se } 3 \leq y < 4 \\ 1 & \text{se } y \geq 4 \end{cases}$

d) $\rho = 0$

e) $Z = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.01 & 0.07 & 0.18 & 0.31 & 0.31 & 0.12 \end{cases}$

f) $P(X \geq 1|Y = 2) = 0.9$

2.41. a) $a = \frac{1}{3}$

b) X e Y não são v.a. independentes

c) $P[Y < X] = \frac{1}{2}$ e $P[Y > 3 - X] = \frac{5}{9}$

d) $E[1/X] = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{3}$

e) $f_{Y|X=\frac{3}{2}}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{y}{3} & \text{se } y \in [1,2] \\ 0 & \text{se } y \notin [1,2] \end{cases}$

f) $11/24$.

2.42. a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores de } y. \end{cases}$$

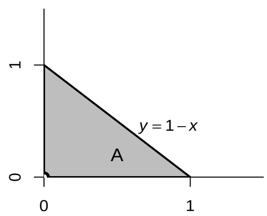
b) X e Y não são v.a. independentes

c) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ y^3 & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{se } y \geq 1. \end{cases}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{2}$

2.43. a) Região (A) onde a função é não nula é:



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1 - x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 < x \leq 1 - y\}$$

b) i) $f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x. \end{cases}$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

ii) A percentagem de amostras é 75%.

iii) $E[X] = 1/3$.

iv) A mediana $< E[X]$.

c) X e Y não são independentes.

d) $P[Y > X] = \frac{1}{2}$.

e) $Cov[X,Y] = -1/36$.

2.44. a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{o.v.de } x \end{cases}$ e $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}(2-\frac{y^2}{2}) & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{o.v.de } y \end{cases}$

X e Y não são variáveis independentes.

b) i)1/10 ii)1/4

c) 0

d) 8/5 ou seja 16000 litros.

2.45. a) $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ e $f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{o.v.de } y \end{cases}$

b) X e Y são v.a. independentes

c) $E[X] = 1$, $E[Y] = 2/3$ e $Cov[X,Y] = 0$ pois X e Y são independentes.

d) 1/e

2.49. a) $X \frown B(20;0.9)$.

b) 0.9568.

c) ≈ 1.

e) 110

f) 0.9568.

2.50. a) $X \frown \mathscr{B}(10, 0.05)$; $P[X = x] = \binom{10}{x} 0.05^x \times 0.95^{10-x}$, com $x = 0, 1, \ldots, 10$

b) 0.3152.

c) 8.61% dos clientes.

2.51. a) $X \frown B(n, 0.2)$.

b) i) 0.2309

ii) 0.9958

c) O número mínimo de cobaias a utilizar na experiência deverá ser 14.

2.54. a) X é a variável aleatória que designa o nº de componentes avariadas no instrumento (instaladas de forma independente). $X \frown B(3, 0.1)$.

b) $P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 0.028$

c) Seja F o acontecimento "o instrumento funcionar".

$P(F|X = 0) = 1$ e $P[X = 0] = 0.7290$, $P(F|X = 1) = 0.6$ e $P[X = 1] = 0.243$,
$P(F|X \geq 2) = 0$ e $P[X \geq 2] = 0.028$

i) $P(F) = 0.8748$.

ii) Pretende-se obter o valor de $P(X = 1|F)$. Pelo teorema de Bayes, tem-se
$P(X = 1|F) = \frac{P(F|X=1)P[X=1]}{P(F)} = 0.1667$.

2.56. a) ≥ 6.

b) 4.

2.57. a) 0.9984.

b) 1.25.

2.62. a) 0.1429.

b) A capacidade de atendimento deverá ser de 4 petroleiros por dia.

c) 2.

d) 1 ou 2.

e) 0.156

f) 1.782.

g) 0.218.

2.63. a) 0.1680.

b) 0.1606.

c) 0.1346.

2.64. a) 3/5

b) 2/3

c) 47.5 euros

2.65. Se $X \frown U(-\theta, \theta)\,(\theta > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & -\theta < x < \theta \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\theta \\ \frac{x+\theta}{2\theta}, & -\theta \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

b) $E[X] = \frac{-\theta+\theta}{2} = 0$ e $Var[X] = \frac{[\theta-(-\theta)]^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}$.
Como a distribuição uniforme é simétrica, a mediana, Me, é igual ao valor médio, logo $Me = 0$.

Mas, podia calcular-se Me como o valor para o qual $F(Me) = 0.5$.

$$F(Me) = \frac{Me + \theta}{2\theta} = 0.5 \Leftrightarrow Me = 0.$$

c) i) $P[1 < Y < \theta + 1] = F(\theta/2) - F(0) = 1/4$.

ii) $Cov(X,Y) = Cov(X, 2X+1) \overset{(*)}{=} 2Cov(X,X) = 2Var[X] = \frac{2\theta^2}{3}$.
$(*)$ propriedade da covariância.

iii) Dado que $Cov(X,Y) \neq 0$, X e Y são variáveis aleatórias não independentes.

2.66. a) 0.7262.

b) 0.1587.

c) 99.6 t.

2.67. 24.092 euros

2.69. a) 0.0062.

b) 0.0125.

c) ≈ 1.

2.70. 6.24 anos

2.75. a) $P[X=0] = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = e^{-1}$; $P[X=1] = \frac{e^{-1}1^1}{1!} = e^{-1}$.
Para $k>1$, $P[X=k]-P[X=k-1] = \frac{e^{-1}}{k!} - \frac{e^{-1}}{(k-1)!} < 0$. Então pode-se dizer que $P[X=k]$ é decrescente, sendo estritamente decrescente para $k>1$.

b) Considerando o nº de ovos postos por segundo independente do nº de ovos postos noutro segundo (disjunto do anterior) e sendo $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$, representando o nº de ovos postos em 5 segundos. $P(Y>3) = 0.735$.

c) Seja W a v.a. que designa o número de ovos postos, por segundo, em 40 aviários idênticos. $W = \sum_{i=1}^{40} X_i$ (X_i o número de ovos postos por segundo no i-ésimo aviário). $P(W<30) \simeq$ 0.0484

2.76. a) Seja X a v.a. que representa a produção semanal (em t) de bananas; $X \frown \mathcal{N}(5,2)$. $P[X<3] = 0.1587$. Como X é simétrica relativamente a $\mu=5$; $P[X>7] = P[X<3] = 0.1587$.

b) O valor da venda é $500X$. $P[500X < 2000] = 0.3085$.

c) Seja S_4 a v.a. que representa a produção de bananas (em t) em 4 semanas, $S_4 = \sum_{i=1}^{4} X_i$ em que $X_i \frown \mathcal{N}(5,2)$ e X_i independentes ($i=1,\ldots,4$).
$S_4 \frown \mathcal{N}(4\times 5, 2\times\sqrt{4}) \Leftrightarrow S_4 \frown \mathcal{N}(20,4)$. $P[S_4 \geq 23] = 0.2266$.

d) Seja Y a v.a. que representa o número de semanas, em 8 escolhidas ao acaso, em que a produção foi inferior a 8 t; $Y \frown B(8,p)$ em que $p = P[X<3]$ calculada em a). $P[Y \leq 1] =$ 0.5803

2.78. O risco da prateleira desabar quando se empilham os 99 sacos é baixo, cerca de 2.2%.

2.81. 0.9998

2.82. a) 3.5 e 42

b) 0.02275

c) 0.02967

d) A v.a. “ tempo total de interrupção da circulação” tem distribuição $\mathcal{N}(3K; 0.75\sqrt{K})$

2.87. a) 0.02275

b) i) 1

ii) 0

iii) 0.0194

c) 25.05 cêntimos.

R2.3. a) i) $P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B) + P(G \cap C) = 0.85$.

ii) $P(C|\overline{G}) = 2/9$.

b) $P(G|A).P(G|B).P(\bar{G}|C) + P(G|A).P(\bar{G}|B).P(G|C) +$
$+P(\bar{G}|A).P(G|B).P(G|C) + P(G|A).P(G|B).P(G|C) =$0.941.

R2.4. a) Tem-se $P(B \cup C) = 1/4$.

i) $P(\overline{B \cup C}) = 3/4$

ii) $P(A) = 0.6$

iii) $P(B \cup C|A) = 0.125$

R2.5. a) 0.8413

b) 0.3083

c) 0.2674

R2.7. a)

X \ Y	0	1	2
0	0.141	0.094	0.015
1	0.281	0.188	0.031
2	0.141	0.094	0.015

b) $P(X+Y \geq 1) = 0.859$

c) $P(X \geq 1|Y = 2) = 0.75$

d) $E(X+Y) = 1.5$ e $Var(X) = 0.5$

R2.10. a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y}(y+1), & y > 0 \\ 0, & \text{outros valores de } y. \end{cases}$

b) Nota: 1 unidade = 5 min; 1 unidade^2 = 25 min^2

$E[X-Y] = E[X] - E[Y] = 3 - 3/2 = 1.5$ unid. $\Leftrightarrow E[X] = 7.5$ min.

$Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X,Y]$

$Var[X-Y] = 3 + 7/4 - 2 \times 3/2 = 7/4$ unid.^{2} $\Leftrightarrow Var[X-Y] = 43.75$ min^2.

c) X e Y não são v.a. independentes.

R2.11. a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-3.4x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

b) $P[X > 2] = 1 - F(2) = 0.00111$.

d) $E[X] = M'_X(0) = \frac{1}{3.4} = 0.294$; $\chi_{0.5} = 0.204$.

R2.13. a) $k = 1$.

b) $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores de } y. \end{cases}$

Como, $f_{X,Y}(x,y) = 2ye^{-x} = f_X(x) \times f_Y(y)$, para $x > 0$ e $0 < y \leq 1$, e $f_{X,Y}(x,y) = 0 = f_X(x) \times f_Y(y)$, para os restantes valores de x e y, conclui-se que as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

c) $P(X > 2|Y = 0.8) = P(X > 2) = e^{-2}$.

d) Como Y é uma v.a. contínua então $P[Y = 0.5] = 0$.

R2.14. a) $E(X) = 0.3$, $E(X^2) = 0.7$, $E(X^3) = 0.3$ e $Var(X) = 0.61$.

b) i)

X \ Y	0	1
-1	0.06	0.14
0	0.09	0.21
1	0.15	0.35

ii) $D = |X - Y| = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.44 & 0.42 & 0.14 \end{cases}$

R2.15. a) $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 9 \\ y - 9 & \text{se } 9 \leq y \leq 10 \\ 1 & \text{se } x > 10. \end{cases}$$

b) Como as variáveis aleatórias X e Y são independentes,
$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Portanto,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x-9), & 9 \leq x \leq 10 \text{ e } 9 \leq y \leq 10 \\ 0, & \text{outros valores de } (x,y). \end{cases}$$

c) $P[9 \leq X \leq 9.5, 9 \leq Y \leq 9.5] = 0.125$.

d) $P[X < Y] = 1/3$.

R2.17. a) $a = 0.1$; $c = 0.1$; $b = 0.2$.

b) $X|(Y = 1) = \begin{cases} 1 & 2 \\ 1/5 & 4/5. \end{cases}$

R2.19. a) 0.667.

b) 750 g.

c) ≈ 1.

R2.20. a) $k = 1$

b) $f(x/y = 1) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{o.v.} \end{cases}$

c) Sim

d) p =prob. de a produção ser superior a 800 kg
$p = \int_{0.8}^{1} 2(1-x)dx = 0.04$
$X \to$ nº de empresas naquelas condições $\quad X \frown B(20; 0.04)$
$P[X \geq 5] = 1 - P[X \leq 4]$

R2.21. a) 30%.

b) ≈ 0.977.

R2.22. a) 0.0498.

b) 0.0592.

c) 0.144.

d) 0.449.

R2.23. a) média = 3; variância = 0.6 .

b) 0.004.

c) 0.9667.

R2.25. a) 0.27.

b) $E[X] = 0.4 \quad Var(X) = 0.0592$.

c) ≈ 0.0918.

d) 0.037.

e) i) 0.61; ii) 0.475.

R2.26. a) Diâmetro médio dos frutos: 9.4 cm; 24.8% e 45.2% de frutos C1 e C2, respectivamente.

b) 0.58.

c)

Categorias	$P(C_i)$	$P(\text{Mau}/C_i)$
C_1	0.25	0.10
C_2	0.45	0.08
C_3	0.30	0.02.

Então P(Mau)= 0.067.

R2.28. a) $P[X > 800] \approx 0.449329$

b) 0.449329

c) ≈ 0.4207

R2.29. a) $F(x) = \begin{cases} (1-e^{-x/2}) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

b) 0.472

c) $P[X > 2.0|X > 0.5] = 0.472$

d) Y - n$^{\underline{o}}$de peças para as quais o tempo de execução é ≥ 1.5 horas;
$Y \frown B(6; 0.472)$; $P[Y = 0] = 0.0216$.

e) ≈ 0.9772

R2.30. a) 0.9773

b) 0.9773

c) Deve pedir-se 379.11 euros

R2.32. a) $R^{'}(t) = -f(t)$

b) i) 1403.69 horas

ii) 0.95

iii) ≈ 0.1611