Soluções de alguns exercícios do Capítulo 2

14. (pág. 43)

1. Designando por A a matriz de cada uma das alíneas tem-se:

   (a) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{4}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2) : b_2 = -2b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $\mathcal{N}(A) = \{(0,0)\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$.

   (c) $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2$.

   $\mathcal{C}(A) = \{(0,0)\}$.

   (d) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3,\ x_2 = 2x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_3 = b_2 + b_1,\ b_1 \in \mathbb{R},\ b_2 \in \mathbb{R}\}$.

   (e) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{2}{5}x_3,\ x_2 = \frac{1}{5}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_3 = b_2 + 2b_1,\ b_1 \in \mathbb{R},\ b_2 \in \mathbb{R}\}$.

   (f) $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$.

   (g) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 4x_3,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$.

   (h) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2x_2 - 2x_3,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2) : b_2 = 3b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}\}$.

   (i) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$.

   $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_2 = 3b_1,\ b_3 = 2b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}\}$.

2. É C.L. (qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é C.L. de v_1, v_2, v_3. Justifique!).

3. $(3,1)$ pertence ao espaço das colunas ($\mathbb{R}^2$).

4. $(0,1,4)$ não pertence ao espaço das colunas.

5. (a) É C.L.
   (b) Não é C.L.
   (c) É C.L.
   (d) Não é C.L.

15. (pág. 45) U l.i. e U' l.d. (4 vetores em $\mathbb{R}^3$ são sempre l.d.).

16. (pág. 46)

1. (a) l.i.
   (b) l.d.
   (c) l.d.
   (d) l.i.
2. Não, pois $(2, 3, 0, 0)$ não é C.L. dos restantes vetores.
3. (a) l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$.
   (b) l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq -2, 1$.
   (c) l.d. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
4. Provar que $\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

17. (pág. 47)

1. Uma possível base é a base canónica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
2. Uma possível base é $\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
3. Uma possível base é $\{(2, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (\frac{2}{3}, 0, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 0, 1)\}$.

18. (pág. 51)

1. (a) Possível base para o espaço nulo: $\{(1, -3, 1, 0), (2, -4, 0, 1)\}$.

   Possível base para o espaço das colunas: $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

(b) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0)\}$.

Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,1),(3,5)\}$.

(c) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,0,0),(0,-2,-1)\}$.

Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3)\}$.

(d) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0,0,0),(3,0,-2,1,0),(-7,0,4,0,1)\}$.

Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3),(1,3,4)\}$

(e) Possível base para o espaço nulo ($\mathbb{R}^2$): $\{(1,0),(0,1)\}$ (base canónica).

Possível base para o espaço das colunas ($\{(0,0,0)\}$): $\{\}$ (por convenção).

2. Uma possível base é a base $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$.

3. Uma possível base é $\{(-1,1,1,0),(0,3,3,-1)\}$.

19. (pág. 52)

1. 2 e 3.

2. $\alpha \neq -1, 1$.

20. (pág. 53)

1. (a) Uma possível base é $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$ e a dimensão é 4.

   (b) Uma possível base é $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0)\}$ e a dimensão é 4.

2. (a)

   (b) Uma possível base é $\{(1,1,0,0),(-6,0,2,1)\}$.

3. (a) Sim.

   (b) Não.

   (c) Sim.

4. (a) Sim.
   (b) Não.
   (c) Não.
5. (a) $\alpha \neq -\frac{3}{3}$ e $\alpha \neq 2$.
   (b) Assumindo $\alpha = 0$ vem $(-1, 1, 2) = \frac{1}{6}v_1 + \frac{4}{3}v_2 - \frac{7}{6}v_3$.
6. NÃO FAZER!
7. NÃO FAZER!
8. Não. Tem que ser uma reta que passa na origem (Porquê?).
9. (a)
   (b) Uma possível base é $\{(1, 0, 5), (1, 1, 1), (0, 3, 1)\}$.
   (c) $(-2, 3, 4) = (1, 0, 5) - 3(1, 1, 1) + 2(0, 3, 1)$.
10. (a) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2x_3 - x_4,\ x_2 = x_3 - 2x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\}$, cuja dimensão é 2 (número de variáveis livres).
    (b)
11. (a)
    (b) Uma possível base é $\{(-\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{2}, 0, 1)\}$.
    (c) Por exemplo $(0, 1, -1)$.
12. (a) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_3,\ x_2 = -\frac{5}{3}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.
    (b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{1}{3}x_3,\ x_2 = -\frac{5}{3}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.
13. (a) $\{(3, 1)\}$.
    (b) $(1, 0)$.
    (c)
    (d)