Capítulo II

Introdução à Teoria da Probabilidade

Noções Preliminares

Definição

Fenómenos aleatórios são fenómenos sujeitos à influência do acaso, como tal, fora do alcance do observador.

Fenómenos aleatórios são caracterizados pela sua:

imprevisibilidade e

regularidade estatística

Experiência aleatória

Definição

Experiência aleatória é todo o procedimento que verifica as seguintes propriedades:

– pode repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições ou pelo menos em condições semelhantes;
– a sua realização dá um resultado de entre um conjunto de resultados possíveis;
– cada um dos resultados da experiência é imprevisível mas é possível considerar "estabilidade na frequência da sua ocorrência".

Exemplos de experiências aleatórias

1. lançamento de dois dados e registo do número de pontos que sai;
2. lançamento de uma moeda e observação da face que fica voltada para cima;
3. contagem do número mensal de acidentes de automóvel numa autoestrada;
4. registo do tempo de vida de uma pessoa, em anos;
5. registo do tempo de trabalho de uma máquina até à primeira avaria.

Espaço de Resultados. Acontecimento

Definição

Espaço de resultados ou **espaço amostra** é o conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória – representa-se por $\boldsymbol{\Omega}$.

Para os exemplos anteriores tem-se

1. $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$;
2. $\Omega = \{$*'face valor', 'face país'*$\} = \{$'FV','FP'$\} = \{1,0\}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}_0$;
4. $\Omega = \mathbb{N}$;
5. $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Definição

Acontecimento aleatório é qualquer subconjunto do espaço de resultados.

Álgebra dos acontecimentos

Seja $\boldsymbol{\Omega}$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Diz-se que $\boldsymbol{A \subset \Omega}$ **se realizou** se o resultado, ω, da experiência é um elemento de A, i.e., $\omega \in A$.

- $\boldsymbol{A \subset B}$, diz-se A subacontecimento de B, se e só se a realização de A implica a realização de B;
- $\boldsymbol{A^c}$ ou $\overline{\boldsymbol{A}}$ diz-se acontecimento complementar ou contrário a A, é o conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em A;
- $\boldsymbol{A \cup B}$, diz-se união de A com B, é o acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos.

Álgebra dos acontecimentos (cont.)

- AB ou $A \cap B$, diz-se produto ou intersecção, é o acontecimento que se realiza apenas quando ambos os acontecimentos se realizam.
- Os acontecimentos A e B dizem-se **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis** se e só se a realização de um implica a não realização do outro, i.e., se e só se $AB = \emptyset$.
- $A - B = A \cap \overline{B}$ diz-se diferença dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize.
- $\emptyset$ diz-se acontecimento impossível.
- Ω diz-se acontecimento certo.

Álgebra dos acontecimentos

Vamos recordar algumas propriedades das operações sobre acontecimentos (procure mais algumas...):

Propriedade	**Interpretação**
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$
	$A \cup B = B \cup A$
Distributividade	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Leis de Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
...	...

Probabilidade de um acontecimento

Definição clássica – Laplace (séc. XIX)

Sob a hipótese de que **todos os casos são igualmente prováveis ou possíveis** (**princípio da simetria**).

Probabilidade de realização de um acontecimento A

$$\boldsymbol{P} = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Definição frequencista

Considere-se n repetições de uma experiência aleatória; n_A o nº de vezes que se verificou A. Para $\boldsymbol{n}$ "grande" tem-se para as frequências relativas

$$\boldsymbol{f_n(A) = n_A/n \approx P}$$

A probabilidade é então interpretada como frequência limite.

Probabilidade de um acontecimento

$\Omega-$ espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Definição de Probabilidade

Probabilidade, $\boldsymbol{P}$, é uma aplicação que a cada acontecimento de Ω associa um número real satisfazendo o seguinte conjunto de axiomas:

A1) $P(A) \geq 0 \qquad \forall A \subset \Omega$;

A2) $P(\Omega) = 1$;

A3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{se} \qquad A \cap B = \emptyset$. (Axioma das probabilidades totais).

Se Ω é infinito,

A3*) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \text{se } A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$
(Axioma completo das probabilidades totais).

Leis básicas das probabilidades

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A) \leq 1$.
5. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
6. Se $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$.
7. Sejam $A_1, ..., A_n$ acontecimentos mutuamente exclusivos então $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Leis básicas das probabilidades (cont.)

1. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
2. Generalização: $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos quaisquer
$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) =$
$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - ... - P(A_{n-1} \cap A_n)$
$+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$
$+... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$.

Exercício 1

Sejam A, B e C acontecimentos definidos num espaço de resultados Ω tais que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4};\ P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0 \text{ e } P(A \cap C) = \frac{1}{8}.$$

Calcule, justificando, a probabilidade de se verificar pelo menos um dos acontecimentos A, B ou C.

Probabilidade condicional

Definição de Probabilidade Condicional

Chama-se **probabilidade condicional de A dado B** ou **probabilidade de A se B** e representa-se por $\boldsymbol{P(A|B)}$, com $P(B) > 0$ a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \equiv \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema das probabilidades compostas

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$,

$$\boldsymbol{P(A \cap B) \equiv P(AB) = P(A)\ P(B|A) = P(B)\ P(A|B)}$$

Independência

Definição

Dois acontecimentos A e B dizem-se mutuamente independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B).$$

Da definição conclui-se que se A e B são independentes então $P(A|B) = P(A)$ se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$ se $P(A) > 0$.

Independência

Teorema

Se A e B são independentes

A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B e $\overline{A}$ e $\overline{B}$, também são independentes.

Nota: Independência **não é equivalente** a exclusividade mútua.

Resultado:

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ e A e B independentes $\Rightarrow$ A e B são não mutuamente exclusivos.

Obviamente o contra-recíproco é verdadeiro.

Generalização a três acontecimentos

Sejam $A,\ B,\ C$ tais que $P(A) > 0$, $P(B) > 0\ \text{ e }\ P(C) > 0$, tem-se,

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = P(B)P(C|B)P(A|BC) =$$

$$= P(C)P(A|C)P(B|AC).$$

Definição – Independência de três acontecimentos

Os acontecimentos A, B e C dizem-se mutuamente independentes ou apenas independentes se e só se
$P(ABC) = P(A)\ P(B)\ P(C)$; $P(AB) = P(A)P(B)$; $P(AC) = P(A)P(C)$; $P(BC) = P(B)P(C)$.

Nota: A independência par a par não assegura independência de um conjunto de acontecimentos.

Exercício 2

Uma empresa produz concentrado de tomate recorrendo a três processos de fabrico e embalamento. Sabe-se que 20% da produção e embalamento de concentrado provém do processo A, 30% do processo B e 50% do processo C.
Nalgumas embalagens daquele concentrado tem-se verificado a ocorrência de deficiências. Sabe-se 1% das embalagens provenientes do processo A, 2% das provenientes do processo B e 8% das provenientes do processo C, respectivamente, têm deficiência.

1. Qual a percentagem de embalagens, produzidas naquela empresa, que apresentam deficiências?
2. Verifica-se que uma embalagem escolhida ao acaso apresenta deficiências. Qual a probabilidade de ter sido fabricada e embalada pelo processo A?

Teorema da probabilidade total

A resolução da Pergunta 1. baseia-se no seguinte teorema

Teorema da probabilidade total

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos definindo uma **partição sobre Ω**, i.e.,

$$A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = \Omega \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j,\ i \neq j.$$

Se $P(A_i) > 0$, então para qualquer acontecimento $B \subset \Omega$ tem-se

$$\boldsymbol{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i).}$$

Teorema de Bayes

Relativamente à Pergunta 2. do exercício anterior, pretendemos *actualizar* a probabilidade de um acontecimento *a priori*, à custa da informação *a posteriori*.
O seguinte teorema formaliza a resposta à questão:

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos formando uma partição de Ω , onde $P(A_i) > 0$. Seja B um outro acontecimento de Ω, tal que $P(B) > 0$. Então para $k = 1, ..., n$ tem-se

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k).P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)}$$

Variável aleatória

Muitas vezes o resultado de uma experiência aleatória não é numérico ou sendo-o não interessa lidar com os resultados possíveis de Ω, mas pretende-se associar-lhe uma quantidade numérica.

Exemplo - lançamento de dois dados e soma dos pontos das faces.

É então mais cómodo associar a cada acontecimento um número, definido de acordo com o objectivo do estudo.

Chama-se **variável aleatória** a esta correspondência.

Variável aleatória

Definição

Chama-se **variável aleatória (v.a.)** e costuma representar-se por $\boldsymbol{X}$, a uma função com domínio Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, cujo valor é determinado pelo resultado de uma experiência aleatória, i.e,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = x$$

Tipos de variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias **discretas** se assumem um conjunto finito ou infinito numerável de valores.

Exemplos:
– número de pintas que sai no lançamento de um dado;
– registo, a intervalos regulares, do número de pessoas em fila espera na caixa de um supermercado;

Variáveis aleatórias **contínuas** são as susceptíveis de tomar qualquer valor real num dado intervalo, que pode ser a recta real
(definição mais rigorosa será dada à frente)

Exemplos:
– o peso de um indivíduo;
– o comprimento de uma folha de uma planta.

Variáveis aleatórias

Mas ... aos valores de uma variável aleatória X pretendemos associar uma probabilidade P_X ou, mais simplesmente, P

Isto consegue-se muito facilmente definindo uma função real de variável real do seguinte modo:

Definição

Chama-se **função de distribuição cumulativa** ou apenas **função de distribuição** associada à variável aleatória X e representa-se por $\boldsymbol{F}$ ou $\boldsymbol{F_X}$, à aplicação

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad \text{tal que} \qquad \boldsymbol{F(x) = P[X \leq x]}.$$

Propriedades da função de distribuição

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
   $F(+\infty) = lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
3. F é uma função monótona não decrescente, i.e., dados dois números reais x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, tem-se $F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $F(x)$ é contínua à direita, i.e., $lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.
5. $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$ onde
   $F(a^-) = lim_{x \to a^-} F(x)$

Função de distribuição e Probabilidade

O conhecimento da função de distribuição $F(.)$ é equivalente ao conhecimento da lei de probabilidade $P_X = P$.

Como $\boldsymbol{F(x) = P[X \leq x]} \longrightarrow$ conhecer $P \Rightarrow$ conhecer $F(x)$. Reciprocamente ... conhecer $F(x)$, permite calcular a probabilidade dos vários tipos de intervalos.

- $P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x) = F(x^-)$;
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x^-)$;
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$;
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$;
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b^-) - F(a)$;
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$;
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$.

Variáveis aleatórias

Vamos agora ver como calcular a função de distribuição cumulativa e consequentemente a probabilidade para cada um dos tipos de variáveis aleatórias caracterizados atrás:

- variáveis aleatórias discretas e
- variáveis aleatórias contínuas

Relembre-se que:

Uma variável aleatória diz-se **discreta** se toma um número finito ou uma infinidade numerável de valores.

Variáveis aleatórias discretas

Seja X uma v.a. tomando k valores, $x_1, ..., x_k$, cada um deles com probabilidades $p_1, ..., p_k$, respectivamente, i.e., $p_i = P[X = x_i]$, $(i = 1, \cdots, k)$.

Definição

Chama-se **função massa de probabilidade** da v.a. X à aplicação que a cada valor $x_i \longrightarrow p_i$, tal que

$$p_i = P[X = x_i]$$

A **função massa de probabilidade** satisfaz:

$p_i \geq 0$, $i = 1, ..., k$ $\qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$

Nota: Se a v.a. tomar uma infinidade numerável de valores tem-se

$p_i \geq 0$, $\forall i \geq 1$ $\qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Variáveis aleatórias discretas

Chama-se **distribuição de probabilidade** da v.a. X ao conjunto de pares $(x_i, p_i)_{i=1,\cdots,k}$.

Habitualmente a **lei (distribuição) de probabilidade** da v.a. X dispõe-se na forma:

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{cases}$$

A distribuição de probabilidade da v.a. discreta permite calcular facilmente a **função de distribuição cumulativa F_X**

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i],$$

ou seja temos a probabilidade cumulativa associada à variável X calculada em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Definição

Uma variável aleatória diz-se **contínua** se existe uma função real de variável real, f, não negativa, tal que

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad -\infty < x < \infty$$

Nota:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \cdots$$

Variáveis aleatórias contínuas

Definição

A função f diz-se **função densidade de probabilidade** ou apenas **função densidade**. Deve verificar as seguintes condições:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Exercício 3

O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória, X, com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição cumulativa de X; represente-a graficamente.
b) Determine $P[1 \leq X \leq 3]$. Interprete esta probabilidade.

Exercício 4

Seja X a v.a. que designa o tempo de vida (em anos) de um dado equipamento, cuja função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} 0.2\, e^{-0.2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f é de facto uma função densidade.

b) Determine a função de distribuição cumulativa de X; represente-a graficamente.

c) Qual a probabilidade de esse equipamento durar entre 1 e 3 anos?

Variáveis aleatórias

Recordemos que:

– No caso de uma variável aleatória discreta a função de distribuição cumulativa é uma função em escada, onde os pontos de salto são os valores onde a v.a. está definida.

– No caso de uma variável aleatória contínua a função de distribuição cumulativa é uma função contínua.

Além de termos interesse em calcular probabilidades associadas a uma variável aleatória,

vamos agora calcular "indicadores" que a caracterizam – são valores reais habitualmente designados por parâmetros.

Valor Médio

Definição

Dada uma v.a. X chama-se **valor médio, esperança matemática, valor esperado** ou **média** e representa-se por $E[X]$, μ_X ou simplesmente μ a

$$E[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p_i \qquad X \text{ é v.a. discreta com distribuição } (x_i, p_i)$$

$$(i = 1, \ldots, k)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx \qquad X \text{ é v.a. contínua com f.d.p. } f(x)$$

Observação:

Se X for v.a. discreta com uma infinidade numerável de valores tem-se $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_i$. Neste caso só existe valor médio se "aquela soma infinita existir".

Analogamente, no caso contínuo, só existe valor médio, $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$, se o integral for absolutamente convergente.

Valor Médio

Se $\boldsymbol{X}$ é uma v.a. e $Y = \varphi(X)$ é uma função real de variável real, define-se valor médio de $\varphi(X)$ como

$$\boldsymbol{E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i)\ p_i} \qquad X \text{ é v.a. discreta com distribuição } (x_i, p_i)$$

$$\boldsymbol{E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ f(x)\ dx} \qquad X \text{ é v.a. contínua com f.d.p. } f(x)$$

Mais uma vez, para que exista valor médio exige-se que exista aquela “soma infinita” (no caso de se tratar de uma v.a. discreta com uma infinidade de valores) ou a convergência absoluta do integral.

Propriedades do Valor Médio

1. Linearidade
   - $E[a] = a$.
   - $E[a + bX] = a + b\, E[X]$.
   - $E[\varphi(X) + \psi(X)] = E[\varphi(X)] + E[\psi(X)]$
2. Positividade

   Se $X \geq 0$, i.e. a variável toma apenas valores ≥ 0, tem-se $E[X] \geq 0$.
3. $$inf(X) \leq E[X] \leq sup(X)$$

Variância e Desvio Padrão

Definição:

Chama-se **variância** de uma variável aleatória X e representa-se por $Var[X]$, σ_X^2 ou apenas σ^2 a

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$ chama-se **desvio padrão**.

Exercício 5:

Verifique que se pode escrever $Var[X] = E[X^2] - \mu^2$

Variância e Desvio Padrão

Propriedades da variância e do desvio padrão

1. $Var[X] \geq 0$
2. $Var[a + b\ X] = b^2\ Var[X]$.

Para o desvio padrão tem-se $\boldsymbol{\sigma_{(a+b\ X)} = |b|\ \sigma_X}$

Voltemos ao Exercício 3

O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória, X, com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

a) Qual o valor esperado do número de esquentadores vendidos por dia?

b) Se cada esquentador é vendido por 150 Euros qual é a distribuição de probabilidade da receita bruta da venda de esquentadores por dia.

c) Calcule a receita bruta esperada da venda de esquentadores por dia.

Exercício 6

Considere X a v.a. que designa a duração (em minutos) de cada chamada telefónica efectuada num certo local, cuja função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule a duração média de uma chamada telefónica.
b) Calcule a variância de X.
c) Se o preço de cada minuto de conversação for 60 cêntimos, qual é, em média, o preço de cada chamada telefónica.

Quantis e Mediana de uma variável aleatória

Definição

Dada uma v.a. X chama-se **quantil de probabilidade** p e representa-se por χ_p o menor valor da variável aleatória X tal que $F_X(\chi_p) \geq p$.

Se $p = 0.5$, chama-se **mediana de** X , representa-se por $\chi_{0.5}$, e é o menor valor da variável tal que $F_X(\chi_{0.5}) \geq 0.5$.

Notas:

- Se X é v.a. contínua o quantil de probabilidade p é o valor χ_p tal que $F_X(\chi_p) = p$.
- Então se X é uma v.a. contínua a mediana $\chi_{0.5}$, é a solução de $F_X(x) = 0.5 \iff \int_{-\infty}^{\chi_{0.5}} f(t)dt = 0.5$.

Vectores aleatórios

Muitas vezes pretendemos associar a cada resultado de uma experiência aleatória $k \geq 2$ atributos numéricos. Obtemos então um vector $(x_1, \cdots, x_k)$, realização do **vector aleatório** $(X_1, \cdots, X_k)$.

Iremos referir-nos apenas ao caso $\boldsymbol{k = 2}$.

Exemplos Pretendemos registar:

- a quantidade de precipitado P e o volume V de gás numa experiência química
- para uma árvore seleccionada ao acaso, a altura e o diâmetro do tronco à altura do peito . . .

Pares aleatórios

Definição

Chama-se par aleatório (X, Y) à aplicação

$$\begin{aligned}(X, Y) : \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ \omega &\to (x, y)\end{aligned}$$

Tipos de pares aleatórios que vamos estudar:

- Par aleatório **discreto** $\Rightarrow$ componentes são ambas variáveis aleatórias discretas;
- Par aleatório **contínuo** $\Rightarrow$ componentes são ambas variáveis aleatórias contínuas.

Pares aleatórios discretos

(X, Y) diz-se um par aleatório **discreto** se toma os valores (x_i, y_j) com probabilidades $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$.

Definição

Chama-se **distribuição de probabilidades conjunta** do par (X, Y) aos valores $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_j})$ e respectivas probabilidades $\boldsymbol{p_{ij}}$

$\boldsymbol{p_{ij}}$ é chamada **função massa de probabilidade conjunta** e deve verificar as seguintes condições:

$$\boldsymbol{p_{ij} \geq 0} \qquad \forall i, j \qquad \text{e} \qquad \sum_{\boldsymbol{i}} \sum_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{p_{ij} = 1}.$$

Pares aleatórios discretos

Um modo cómodo de representar a distribuição de probabilidades conjuntas de um par aleatório discreto (X, Y) é na forma de um quadro

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	$p_{2\bullet}$
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	$p_{m\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	...	$p_{\bullet n}$	1

$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ e $p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ chamam-se **probabilidades marginais** de X e Y respectivamente.

Pares aleatórios discretos

Definição

A **probabilidade condicional** de X dado $Y = y_j$ (fixo) com $P[Y = y_j] > 0$ é definida como

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

Definição

Do mesmo modo a **probabilidade condicional** de Y dado $X = x_i$ (fixo) com $P[X = x_i] > 0$ e x_i é definida como

$$P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

Pares aleatórios contínuos

Definição

Um par aleatório (X, Y) diz-se **contínuo** se existir uma função $\boldsymbol{f(x,y)}$, chamada **função densidade (de probabilidade) conjunta**, que verifica as seguintes condições:

- $f(x,y) \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ tem-se $\quad P[(X,Y) \in A] = \displaystyle\int\int_A f(x,y)dxdy.$

Definição

A **densidade marginal de X** é definida como $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

e a **densidade marginal de Y** como $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

Pares aleatórios contínuos

Definição

Define-se **densidade condicional** de X dado $Y = y$, fixo, como

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad f_Y(y) > 0$$

Definição

Define-se **densidade condicional** de Y dado $X = x$, fixo, como

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_X(x) > 0$$

Independência de variáveis aleatórias

Definição

Dado o par aleatório (X, Y) diz-se que as variáveis X e Y são **independentes** se e só se

- $p_{ij} = p_{i\bullet}\, p_{\bullet j} \quad \forall i, j$, no caso de (X, Y) ser um par aleatório discreto
- $f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no caso de (X, Y) ser um par aleatório contínuo.

Valor Médio

Definição

Dado o par aleatório (X, Y), e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, define-se

$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)\, p_{ij}\ , \qquad \text{no caso discreto}$$

$$E[g(X,Y)] = \int\int_{R^2} g(x,y)\, f(x,y)\, dxdy\ , \qquad \text{no caso contínuo.}$$

Propriedades do Valor Médio

1. **Aditividade** $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$

2. **Desigualdade de Schwarz** Se $E[X^2]$ e $E[Y^2]$ existem então $E^2[XY] \leq E[X^2]E[Y^2]$.

   Corolário: $E^2[X] \leq E[X^2]$
   Nota: se $E[X^2]$ existe $\Longrightarrow$ existe $E[X]$.

3. Se X e Y variáveis aleatórias independentes

$$\Downarrow$$

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Nota:

O recíproco da propriedade 3. não é verdadeiro:

Verifique que se X e Y são v. a.'s com a seguinte distribuição de probabilidades

X Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

tem-se $E[XY] = E[X]E[Y]$ e no entanto X e Y não são independentes. **Verifique!**

A covariância

Definição:

Dado o par aleatório (X, Y) chama-se **covariância** de X e Y a

$$\boldsymbol{Cov[X,Y] \equiv \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}$$

Exercício:

Verifique que $\boldsymbol{Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]}$

A covariância - propriedades

Propriedades

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias.

$$Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X, Y]$$

2. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes

$$Var\,[X \pm Y] = Var[X] \; + \; Var[Y]$$

3. Se X e Y são v. a.'s independentes $\Longrightarrow Cov[X, Y] = 0$.

Nota: O recíproco não é verdadeiro.

4. $Cov[a + bX, c + dY] = bd\, Cov[X, Y]$.

5. $|Cov[X, Y]| \leq \sigma_X \, \sigma_Y$.

O coeficiente de correlação; propriedades

Definição:

Chama-se **coeficiente de correlação** de X e Y e representa-se por $\boldsymbol{\rho}$ ou $\boldsymbol{\rho_{X,Y}}$ a

$$\boldsymbol{\rho \equiv \rho_{X,Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \ \sigma_Y}}$$

($\sigma_X > 0$ e $\sigma_Y > 0$).

Propriedades do coeficiente de correlação

1. $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
2. Se X e Y são v. a. independentes $\implies \quad \rho_{X,Y} = 0.$
3. $\rho_{a+bX,c+dY} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & \text{se } bd > 0 \\ -\rho_{X,Y} & \text{se } bd < 0 \end{cases}$

Momentos e função geradora de momentos

O cálculo do valor médio e da variância de uma v.a. X e ainda propriedades de pares aleatórios (ou genericamente vectores aleatórios) podem ser abordados de forma uniformizadora usando uma função adequada (quando ela está definida).

Considere-se uma função associada à v.a. X que vamos representar por

$M_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]} \qquad \boldsymbol{(t \in \mathbb{R})}$

Momentos e função geradora de momentos

Exercício:

Para as variáveis a seguir indicadas calcule $\boldsymbol{M_X(t)}$, com $t \in \mathbb{R}$:

- X, variável aleatória discreta, associada ao lançamento de uma moeda equilibrada.
- X, variável aleatória contínua, com função densidade
  $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Função geradora de momentos

Tem-se o seguinte resultado:

$$\frac{dM_X}{dt}|_{t=0} = E[X] \quad \text{e} \quad \frac{d^2M_X}{dt^2}|_{t=0} = E[X^2]$$

Nota:

Esta função, a que se chama **função geradora de momentos**, pode ser então usada para determinar $E[X]$ e $Var[X]$, calculando a primeira e segunda derivadas em $t = 0$ (se existirem).

Para as variáveis aleatórias indicadas no **exercício** do slide anterior, calcule $E[X]$ e $Var[X]$, com recurso a M_X.

Função geradora de momentos

Propriedades da função geradora de momentos de uma v.a. X

1. $M_{a+b\ X}(t) = e^{at}\ M_X(bt)$.
2. **Teorema da unicidade**
   Se para duas v.a. X e Y se verifica $M_X(t) = M_Y(t)$ então X e Y têm a mesma função de distribuição.

   Reciprocamente, se existir a função geradora de momentos, ela é única.
3. Se Xe Y **são variáveis aleatórias independentes**

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

Nota: Mais adiante esta propriedade será de grande utilidade.

Principais Modelos (Distribuições) Discretos

- Distribuição uniforme discreta
- Distribuição de Bernoulli e binomial
- Distribuição geométrica
- Distribuição hipergeométrica
- Distribuição de Poisson

A distribuição uniforme discreta

Definição

Uma v.a. X diz-se ter distribuição uniforme discreta se
$P(X = x_i) = 1/k, \quad i = 1, ..., k$, i.e., se toma os valores

$$\boldsymbol{x_1,\ x_2\ ,\ \ldots\ , x_k}$$

com probabilidades $\boldsymbol{1/k, 1/k, ..., 1/k}$

Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$E[X] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i; \quad Var[X] = \frac{1}{k}\sum_{i}^{k}(x_i - \mu)^2; \quad M_X(t) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e^{tx_i}.$$

A distribuição uniforme discreta

Caso particular

Se $$X = \begin{cases} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{n+1}{2}; \quad Var[X] = \frac{n^2-1}{12} \quad \text{e} \quad M_X(t) = \frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)},\ t \neq 0$$

A distribuição de Bernoulli

$$\textbf{Experiência} = \begin{cases} \textbf{realização} \text{ de um acontecimento} & \underline{sucesso} \\ \textbf{não realização} \text{ do acontecimento} & \underline{insucesso} \end{cases}$$

Exemplos:

- o teste de uma dada droga num rato e o registo da reacção positiva ou negativa;
- a inspecção dos items numa linha de fabrico para observar se cada um é defeituoso ou não;

A distribuição de Bernoulli

Cada uma das repetições sucessivas da experiência – **prova**.

Definição:

Chama-se **variável aleatória de Bernoulli** à variável X, associada ao resultado de cada prova de Bernoulli e considera-se

- $X = 1$, com probabilidade p, se há sucesso;
- $X = 0$, com probabilidade $1 - p = q$, se há insucesso.

A distribuição Binomial

Considere-se **uma sucessão de provas de Bernoulli independentes** satisfazendo:

- cada prova tem apenas um de dois resultados possíveis: **sucesso** ou **insucesso**.
- em cada prova a probabilidade de sucesso, p, permanece constante, sendo $q = 1 - p$, a probabilidade de insucesso.
- o resultado de cada prova é independente do resultado das restantes.

A distribuição binomial– exemplo

Definição:

A v.a. X que conta o número de sucessos em n **provas nas condições referidas atrás** chama-se **variável aleatória binomial**, diz-se ter **distribuição binomial** e representa-se por $X \frown \mathcal{B}(n, p)$.

Numa experiência colocam-se 5 bolbos de junquilho a germinar, de um pacote com uma garantia de germinação de 40% dos bolbos. Qual a probabilidade de, desses 5 bolbos, 3 germinarem?

Como a germinação é independente de bolbo para bolbo, a probabilidade de germinarem 3 bolbos de entre os 5 é então
$\binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2$

A distribuição binomial

Então sendo X a v.a. que conta o número de sucessos em n **provas de Bernoulli independentes**, $X \frown \mathcal{B}(n,p)$, temos a

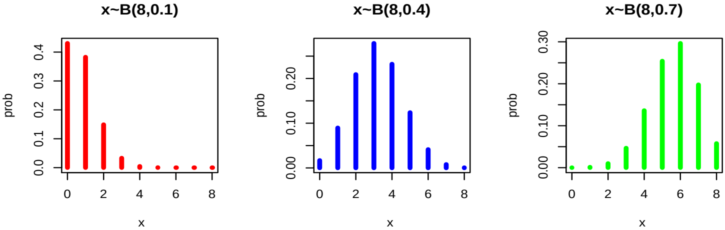
Caracterização da v.a. $X \frown \mathcal{B}(n,p)$:

$x = 0, 1, 2, ..., n$ $\longrightarrow$ n^{o} de "sucessos" nas n provas

$P[X = x] = \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$ $\longrightarrow$ probabilidade de se observarem x "sucessos"

A distribuição binomial–exercício

Para $n = 8$ e vários valores de p, veja a função massa de probabilidade.



Sugestão: Consulte as folhas de Introdução ao software R e use os comandos (por exemplo, para obter o primeiro gráfico):

$>$ x $< -$ 0:8
$>$ plot(x,dbinom(x,size=8,prob=0.1),type="h", col = "red", lwd=4,xlab="x",main="$X \sim B(8, 0.1)$",ylab="prob")

A distribuição binomial

Valor médio, variância e função geradora de momentos $X \frown \mathcal{B}(n,p)$

$$E[X] = np; \quad Var[X] = npq; \quad M_X(t) = \left(p\, e^t + q\right)^n$$

Relação entre a distribuição do número de sucessos e de insucessos

$$X \frown \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow (n - X) \frown \mathcal{B}(n, 1-p).$$

Para valores de $n \leq 20(25)$, existem tabelas para o cálculo das probabilidades.
As tabelas que temos à disposição apresentam os valores da função de distribuição cumulativa.

A distribuição geométrica

Considere-se de novo que temos provas de Bernoulli independentes, mas agora . . .
o número de provas não é fixo pois ... **pretendemos ir realizando provas até ocorrer** pela primeira vez o "sucesso".

Seja então X o **número de provas necessárias até que ocorra pela primeira vez o "sucesso".** Diz-se que X tem **distribuição geométrica** e costuma representar-se por $X \frown \mathcal{G}(p)$.

Caracterização da v.a. $X \frown \mathcal{G}(p)$

$$P[X = x] = pq^{x-1} \quad x = 1, 2, \ldots \qquad 0 < p < 1 \quad q = 1 - p$$

A distribuição geométrica

Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$M_X(t) = \frac{p\ e^t}{1-qe^t} \quad (qe^t < 1); \quad E[X] = 1/p; \quad Var[X] = q/p^2$$

Teorema - Propriedade da falta de memória da distribuição geométrica

Se $X \frown \mathcal{G}(p)$ então sendo m e n inteiros positivos

$$P[X > m + n | X > m] = P[X > n]$$

A distribuição geométrica

Nota:

Interpretando a distribuição geométrica como o número de provas que se vão realizando até se observar um “sucesso”:

Se tiverem decorrido mais de m provas sem que se tenha verificado um "sucesso", a probabilidade de se ter de esperar mais de n provas para se observar um "sucesso" é a mesma caso se estivesse no início da experiência.

A distribuição hipergeométrica

Mas ... há experiências nas quais a probabilidade de sucesso não se mantém constante, não sendo as provas independentes.

Exemplo

Num lote de 20 pneus enviados a um fornecedor sabe-se que há 6 defeituosos. Um cliente vai a esse fornecedor comprar 5 pneus. Qual a probabilidade de levar 2 defeituosos?

- O total de modos de seleccionar 5 pneus quaisquer do lote é $\binom{20}{5}$
- Há $\binom{6}{2}$ modos de seleccionar 2 defeituosos e, para cada um destes há $\binom{14}{3}$ modos de escolher 3 bons, para completar os 5.

Portanto ... a probabilidade de, dos 5 pneus escolhidos ao acaso, 2 serem defeituosos (e portanto 3 bons) é: $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{14}{3}}{\binom{20}{5}}$

A distribuição hipergeométrica

Definição

Diz-se que temos uma **experiência hipergeométrica** se

dada uma população de dimensão

$\boldsymbol{N}$ com $\begin{cases} K \text{ “sucessos”} \\ N-K \text{ “insucessos”} \end{cases}$ $\rightarrow$ $\underline{\text{extraímos, sem reposição}}$ $\boldsymbol{n}$

Definição

A v.a. X que conta o número de sucessos numa experiência hipergeométrica **é uma v.a. hipergeométrica** de parâmetros N, n e K e costuma representar-se por $\boldsymbol{X \frown \mathcal{H}(N, n, K)}$

A distribuição hipergeométrica

Qual a probabilidade de $\left\{ \begin{array}{llll} \text{dos} & K & \text{seleccionar} & x \\ \text{dos} & N-K & \text{seleccionar} & n-x \end{array} \right.$?

Seja $\quad X \frown \mathcal{H}(N, n, K)$

$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad max(0, n-N+K) \le x \le min(n, K)$$

Valor médio e variância de $X \frown \mathcal{H}(N, n, K)$

$$E[X] = n\frac{K}{N}; \qquad Var[X] = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

A distribuição hipergeométrica

Observação: Quando $N >> n$, a probabilidade de sucesso em cada tiragem sem reposição varia muito pouco de prova para prova , então . . .

$\longrightarrow$ pode considerar-se a distribuição binomial como uma aproximação da distribuição hipergeométrica com $p = K/N$, i.e.,

Resultado:

Se N bastante maior que n tem-se

$$\mathcal{H}(N, n, K) \approx \mathcal{B}(n, p), \quad \text{com} \quad p = K/N.$$

Como regra prática, pode considerar-se boa a aproximação para $n < N/10$.

A distribuição de Poisson

Considere que pretende contar, por exemplo, o número de:

- chamadas telefónicas recebidas numa central telefónica num certo intervalo de tempo;
- chegadas de clientes a uma bilheteira durante um certo período;
- chegadas de sinistrados a um banco de um hospital durante um certo período;
- dias que uma dada escola fecha durante o inverno;
- erros de tipografia por página;

Se a contagem do número de “sucessos” que ocorrem num dado intervalo de tempo ou num domínio específico, satisfaz as seguintes condições:

A distribuição de Poisson

- o número de “sucessos´´ que ocorrem num dado intervalo de tempo ou domínio é independente do número que ocorre em qualquer outro intervalo ou domínio disjunto do anterior;
- a probabilidade que o “sucesso´´ se verifique uma vez em qualquer intervalo muito curto (ou região muito pequena), de amplitude δ, é proporcional a δ , i.e, é igual a $\lambda\delta$ e não depende do número de sucessos que ocorrem fora desse intervalo ou região;
- a probabilidade de que o “sucesso´´ se verifique mais do que uma vez num intervalo ou domínio de amplitude muito pequena é ≈ 0.

diz-se que estamos perante **experiências de Poisson** ou **um processo de Poisson**

A distribuição de Poisson

Definição

A v.a X que conta o número de sucessos numa experiência de Poisson diz-se ter **distribuição de Poisson** e depende apenas do parâmetro $\boldsymbol{\lambda} \longrightarrow$ número médio de sucessos que ocorrem no intervalo de tempo (ou na região especificada).

Representa-se por $\boldsymbol{X \frown \mathcal{P}(\lambda)}$ e a lei de probabilidade é:

$$\boldsymbol{P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}}, \qquad x = 0, 1, 2...., \qquad \lambda > 0.$$

Nota: Facilmente se verifica que $P[X = x] \geq 0 \quad \forall x = 0, 1, 2...$, mas para mostrar que $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} = 1$, são necessários conhecimentos sobre séries de funções que actualmente os alunos não possuem.

A distribuição de Poisson

Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$\boldsymbol{M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \qquad E[X] = \lambda \qquad Var[X] = \lambda.}$$

Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. $X_i \quad i = 1, ..., k$ são independentes e $X_i \frown \mathcal{P}(\lambda_i)$ então

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \frown \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right).$$

Existem tabelas da Poisson para consulta $\rightarrow$ função de distribuição cumulativa.

A distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson surge ainda como o limite da distribuição binomial quando $n \to \infty$ e $p \to 0$.

Teorema

Quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mantendo-se constante o produto np tem-se

$$X \frown \mathcal{B}(n,p) \quad \Rightarrow \quad X \sim \mathcal{P}(\lambda) \qquad \text{com } \lambda = np.$$

Regra prática Em geral, a distribuição de Poisson fornece uma boa aproximação da distribuição binomial quando $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$

Principais Distribuições Contínuas

- Distribuição uniforme contínua
- Distribuição de Gauss ou normal
- Distribuição exponencial

A distribuição uniforme contínua

Definição

Uma v.a. contínua diz-se ter **distribuição uniforme** ou **rectangular** no intervalo (a, b) e representa-se por $\boldsymbol{X \frown \mathcal{U}(a,b)}$ se a função densidade de probabilidade (f.d.p.) é da forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & x \leq a \quad \text{ou} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$\boldsymbol{E[X] = \frac{a+b}{2}; \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, \; t \neq 0}$$

Caso particular:

Considere a distribuição $\mathcal{U}(0,1)$

Exercício:

Escreva a função densidade, a função distribuição cumulativa, valor médio, variância e função geradora de momentos.

A distribuição normal ou de Gauss

Surge século XVIII $\rightarrow$ ligada ao estudo dos erros de medições repetidas de uma mesma quantidade.

Papel fulcral nas Probabilidades e Estatística, porque:

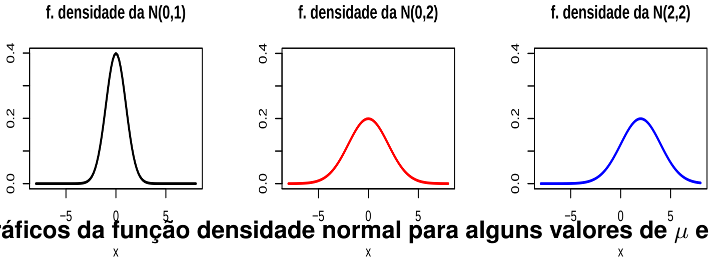
- muitas variáveis biométricas têm uma distribuição muito próxima da normal;
- por vezes uma variável que não é normal pode ser transformada de um modo simples numa outra com distribuição normal;
- a parte central de muitos modelos não normais é por vezes razoavelmente bem aproximada por uma distribuição normal.

Definição

Uma v.a. contínua X diz-se ter **distribuição normal** ou **de Gauss** com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ e representa-se por $\boldsymbol{X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)}$ se a sua f.d.p. é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < \mu < +\infty, \qquad 0 < \sigma < +\infty$$



Gráficos da função densidade normal para alguns valores de μ e σ.

A distribuição normal ou de Gauss

Propriedades da curva densidade da variável com distribuição normal

1. É simétrica relativamente a μ.
2. É uma curva unimodal, a moda é μ.
3. Tem pontos de inflexão em $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$.

Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$E[X] = \mu; \quad Var[X] = \sigma^2 \quad \text{e} \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

A distribuição normal reduzida

Definição

Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ a variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0,1)$ chama-se **normal reduzida**.

Notações para a normal reduzida

$$Z \frown \mathcal{N}(0,1); \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \text{e} \quad \Phi(z) = P[Z \leq z]$$

Propriedade – consequência da simetria

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Tabelas $\longrightarrow$ dão o valor da função de distribuição cumulativa da normal reduzida.

A distribuição normal ou de Gauss

Alguns teoremas de grande importância no estudo da normal.

Teorema

Seja $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ a v.a. $Y = a + bX$ é também normal e tem-se

$$Y \frown \mathcal{N}(a + b\mu, |b|\sigma).$$

Corolário - muito importante

Seja $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, então a v.a. $\boldsymbol{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$ tem distribuição normal reduzida, i.e., $\boldsymbol{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \frown \mathcal{N}(0,1)}$.

Exercício

Uma vacaria tem uma produção diária de leite que se admite seguir uma lei normal com $\mu = 950\ l$ e $\sigma = 50\ l$

a) Qual a probabilidade de se ter uma produção inferior a 1000 litros?

b) Qual a percentagem de dias em que a produção ultrapassa a produção média em mais de 100 litros?

c) Se na região existe outra vacaria, com uma produção diária que se admite normal com $\mu = 900\ l$ e $\sigma = 40\ l$, funcionando independentemente da primeira, qual a probabilidade de num dado dia a produção total das duas vacarias ser superior a 1800 litros?

A distribuição normal ou de Gauss

Para respondermos à alínea c) necessitamos do seguinte Teorema

Teorema

Sejam $X_1, ..., X_n$, v.a. normais independentes, tais que $X_1 \frown \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $X_2 \frown \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, $\cdots$, $X_n \frown \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$.
A v.a. $\boldsymbol{X = X_1 + X_2 + ... + X_n}$ tem distribuição normal de parâmetros (μ, σ), com

$$\boldsymbol{\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}}$$

A distribuição normal ou de Gauss

Generalização do teorema anterior

Mostre que, sendo $X_1, ..., X_n$ v.a. nas condições do teorema, $a_1\ X_1 + a_2\ X_2 + ... + a_n\ X_n$ tem distribuição normal de parâmetros (μ, σ), com $\mu = a_1\ \mu_1 + a_2\ \mu_2 + ... + a_n\ \mu_n$ e $\sigma = \sqrt{a_1^2\ \sigma_1^2 + a_2^2\ \sigma_2^2 + ... + a_n^2\ \sigma_n^2}$.

Corolário

Sejam X_i n v.a. normais independentes e semelhantes, i.e., tendo todas o mesmo valor médio μ e a mesma variância σ^2.

As variáveis aleatórias soma e média, definidas respectivamente como

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

têm distribuição normal assim definida

$$\boldsymbol{S_n \frown \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\overline{X}_n \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})}.$$

O Teorema Limite Central

Provámos que a soma de NORMAIS independentes é ainda uma normal. Mas temos mais ...

a distribuição aproximada da SOMA de n variáveis aleatórias com QUALQUER lei, mas independentes, identicamente distribuídas e verificando certas condições é também normal.

Teorema limite central

Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

A v.a. $\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$ verifica quando n é "grande":

$$\boldsymbol{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

Aplicações do Teorema Limite Central

Note que também se tem $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$

Teorema de De Moivre

Seja X uma v.a. com distribuição binomial com valor médio $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$. Então quando $n \to \infty$,

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

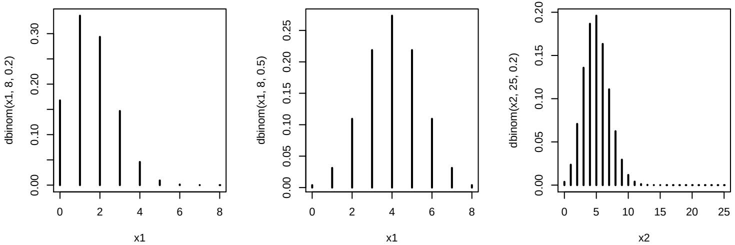
Aplicações do Teorema Limite Central

Recorde-se que se, na distribuição binomial, n grande e $p \approx 0$(ou 1) uma boa aproximação é dada pela distribuição de Poisson.

E agora para valores de $p \approx 1/2$ o teorema limite central oferece muito boa aproximação para a normal.

Aplicações do Teorema Limite Central - Exercício

Utilizando o R, obtenha os seguintes gráficos da função massa de probabilidade de $X \frown \mathcal{B}(8, 0.2)$, $X \frown \mathcal{B}(8, 0.5)$ e $X \frown \mathcal{B}(25, 0.2)$.



O que observa?

Regra prática

Se na distribuição binomial $np > 5$ e $nq > 5 \Longrightarrow$ a **aproximação pela distribuição normal é boa.**

Aplicações do Teorema Limite Central

Teorema

Seja $X \frown \mathcal{P}(\lambda)$. Quando $\lambda \to \infty$ então $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Regra prática:
A aproximação é considerada boa para $\boldsymbol{\lambda \geq 20}$.

Observação: Quando considerámos a aproximação da distribuição binomial pela Poisson, ambas eram distribuições discretas.
Os dois teoremas acabados de enunciar dão-nos uma aproximação de uma v.a. discreta por uma v.a. contínua.

Neste caso é necessário fazer-se o que se designa por **correcção de continuidade** que consiste em considerar todo o inteiro k representado pelo intervalo $(k-1/2, k+1/2)$.

A distribuição exponencial

Uma variável aleatória diz-se ter **distribuição exponencial** de parâmetro β e representa-se por $X \frown Exp(\beta)$ se a função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$M_X(t) = \frac{1}{1-\beta t},\ (t < 1/\beta); \quad E[X] = \beta; \quad Var[X] = \beta^2$$

A distribuição exponencial: observações

Relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson:

Considere-se contagens de sucessos em intervalos de tempo. O tempo ao fim do qual se verifica o primeiro sucesso é uma variável aleatória contínua.

Teorema

Se X, número de sucessos num intervalo de tempo, é tal que $X \frown \mathcal{P}(\lambda)$ então W a v.a. que designa o tempo de espera pelo primeiro sucesso (ou o tempo entre a ocorrência de dois sucessos consecutivos) satisfaz

$$W \frown Exp(\beta = 1/\lambda).$$

A distribuição exponencial: observações

Exercício:

Verifique que a distribuição exponencial goza da propriedade da **falta de memória**.

Aplicações:

Duração de vida, **teoria da fiabilidade**, **tempos de espera,etc.**