

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º teste de Álgebra Linear (A)
20 de dezembro de 2019 - Duração: 1h30m

Número:

Nome:

Turma:

- [3.5v] 1. Considere $V = \langle (-1, 1, 1, 0), (1, -2, 0, 1), (1, -4, 2, 3) \rangle$, $b = (-1, 0, -1, 1)$ e $c = (2, -4, 3, 2)$.
- a) Verifique que b é ortogonal a V .
 - b) Indique uma base ortogonal para V .
 - c) Calcule as projeções ortogonais do vetor c sobre V e V^\perp e indique a distância de c a V^\perp .
 - d) Determine, justificando, uma matriz B tal que $Bx \in V$ e $x - Bx \in V^\perp$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$.
- [1v] 2. Seja U um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n . Mostre que se a e b são vetores de \mathbb{R}^n tais que $\text{proj}_U(a) = \text{proj}_U(b)$ então $a - b$ é ortogonal a U .
- [2.5v] 3. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- a) Mostre que $(3, 0, 1)$ é vetor próprio de A para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e indique o correspondente valor próprio.
No que se segue considere $\alpha = 4$.
 - b) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
 - c) Existirá uma base de \mathbb{R}^3 constituída por vetores próprios de A ? Justifique a resposta.
- [3v] 4. Uma empresa produz três tipos de fertilizantes, A , B e C . Cada tonelada de fertilizante A , B e C gera 50, 40 e 60 unidades de resíduos tóxicos e origina um lucro de 10, 5 e 10 euros, respectivamente. A empresa tem capacidade para produzir até 15 mil toneladas de fertilizante por mês. Compromissos já assumidos obrigam a empresa a entregar mensalmente 5 mil toneladas de fertilizante A a um cliente. Pretende-se determinar o plano de produção mensal que gera a menor quantidade possível de resíduos tóxicos de modo a obter-se um lucro mensal de pelo menos 100 mil euros e uma produção mensal nunca inferior a 80% da capacidade de produção máxima da empresa.
- a) Formule o problema em programação linear, atribuindo significado às variáveis.
 - b) Escreva o problema na forma *standard*.
 - c) Considere que se produzem mensalmente 12 mil toneladas de fertilizante que originam um lucro de 100 mil euros e que a produção mensal de fertilizante A é de 8 mil toneladas.
 - i) Indique as quantidades de fertilizantes B e C produzidas e a quantidade de resíduos tóxicos gerada.
 - ii) Mostre que este plano de produção mensal corresponde a um vértice da região admissível do problema.