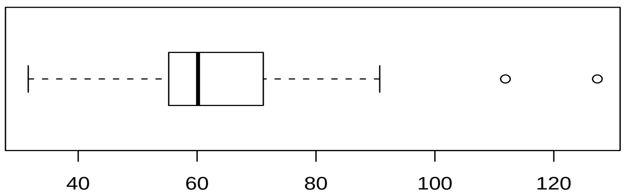
Instituto Superior de Agronomia
Soluções do 1º Teste de Estatística (2019/2020)

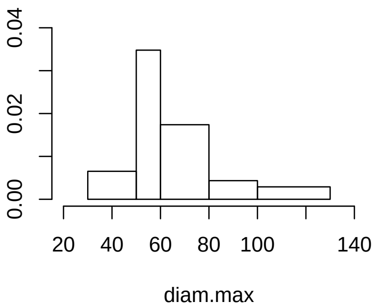
Nota: Não se trata de uma resolução, apenas se apresenta as soluções de cada pergunta, por vezes com um pouco de explicação para apoio

1. a) A=30.80 B=$Q^*_{0.5} = x_{(\frac{23+1}{2})} = x_{(12)} = 60.16$ e C=2.

b) $\min(x_i) = 30.8$; $Q_1 = 54.43$; $Q_2 = 60.16$; $Q_3 = 74.96$ e $\max(x_i) = 127.32$
BI=$Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1) = 23.635$ e BS=$Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1) = 105.755$
Como BS< $\max(x_i)$ e olhando para os dados ordenados vemos que há 2 candidatos a *outliers* à direita: 111.86 e 127.32



c) Temos classes com amplitudes diferentes; a altura de cada classe i é dada como $alt_i = f_i/h_i$, com f_i e h_i frequência relativa e amplitude da classe i, respectivamente



2. a) $y = -2690.36 + 94.08\,x$.
Significado do declive: por cada cm de crescimento do diâmetro máximo das árvores na parcela, o peso da cortiça aumenta em média 94.08 kg.

b) Sim, pois $r = b_1 \dfrac{s_y}{s_x} = 0.842060$ (próximo de 1, associado a uma relação linear perfeita) e a nuvem de pontos apresenta-se próximo de uma recta.

c) 1 arroba =15 kg $\Leftrightarrow$ 1 kg =(1/15) arroba. Só a variável y é transformada: $y' = (1/15)y$
$b_1' = \dfrac{cov(x, y')}{s_x^2} = \dfrac{1}{15}\dfrac{cov(x,y)}{s_x^2} = b_1/15$= 6.272 arrobas.

3. a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

b) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$

c) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{13}{12}$.

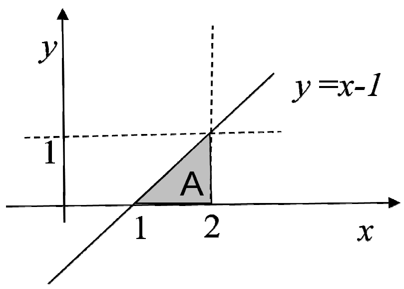
d) i) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^1 xe^{-y}dx + \int_1^2 \frac{1}{2}e^{-y}\, dx + \int_2^{+\infty} 0\, dx$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{outros valores de } y. \end{cases}$$

ii) X e Y são independentes se e só se $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ora se $0 \le x \le 1,\ y > 0$ tem-se $f_X(x) \times f_y(y) = xe^{-y} = f(x,y)$,
$1 \le x \le 2,\ y > 0$ tem-se $f_X(x) \times f_y(y) = \frac{1}{2}e^{-y} = f(x,y)$,
para outros valores de (x,y) tem-se $f_X(x) \times f_y(y) = 0$,
logo X e Y são independentes.

iii) Como X e Y são independentes $P(X < \frac{1}{2}\,|\,Y = 1) = P(X < \frac{1}{2}) = F_X(1/2) = 1/8$

iv) Veja-se o gráfico abaixo : $P(Y < X - 1) = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{x-1} \frac{1}{2}e^{-y} = \dfrac{e^{-1}}{2}$



4. Considere-se os acontecimentos: O - lugar estar ocupado; C - lugar ser comprado
$P(\overline{O}|C) = 0.05$ e o $P(\overline{O}|\overline{C}) = 1$

a) $P(C) = 0.75,\ P(\overline{C}) = 0.25$
$P(\overline{O}) = P(\overline{O} \cap C) + P(\overline{O} \cap \overline{C}) = P(C)P(\overline{O}|C) + P(\overline{C})P(\overline{O}|\overline{C}) = 0.2875$

b) $P(C|\overline{O}) = 0.1304$

c) $n = 18$ - número de lugares disponíveis todos comprados.

i) X - conta o número de lugares ocupados.
Estamos em presença de provas de Bernoulli, independentes, com probabilidade de sucesso $p = 0.95$, logo $X \frown Binomial(18, 0.95)$

ii) $P(X \ge 15) = P(18 - X \le 18 - 15) = P(Y \le 3) = 0.9891$, sendo $Y \frown Binomial(18, 0.05)$ a v.a. que conta o número de lugares não ocupados

iii) Pede-se $E[Y] = 18 * 0.05 = 0.9$

5. a) Esta propriedade está provada nas folhas teóricas - Capítulo 2, pág. 66, prop. 4.

b) $Cov[X,Y] = 0$

i) $Cov[X, X+Y] = E[X(X+Y)] - E[X]E[X+Y] = E[X^2 + XY] - E[X](E[X] + E[Y]) = E[X^2] + E[XY] - (E[X])^2 - E[X]E[Y] = E[X^2] - (E[X])^2 + E[XY] - E[X]E[Y] = Var[X] + Cov[X,Y] = Var[X]$ logo Verdadeira;

ii) $Var[X - Y] = Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X,Y] = Var[X] + Var[Y] - 0$ (ver formulário) – logo Falsa.