INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

30 de janeiro de 2020 - Duração: 2h

Número: Nome: Turma:

[9v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha-2 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 2 & -3 & \alpha-2 \end{bmatrix} = [v_1\ v_2\ v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique, justificando, os valores de α e β para os quais:

i) $\operatorname{dist}(v_2, v_3) = 2$.

ii) $\dim\langle v_1, v_2, v_3, b\rangle = 3$.

iii) $\vec{0}$ se escreve de maneira única como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

iv) $[A|b]$ invertível.

No que segue considere $\alpha = \beta = 1$.

c) Escreva b como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 de duas maneiras distintas.

d) Mostre que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, b\rangle$.

e) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)^\perp$.

f) Determine a solução de $A^T x = 0$ que se encontra à menor distância de $(0, -1, 0, 6)$ e indique o valor dessa distância.

[5v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [v_1\ v_2\ v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Descreva analítica e geometricamente $\mathcal{C}(A)$.

b) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Indique um vetor próprio de A, o correspondente valor próprio e a respectiva multiplicidade geométrica.

d) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua b e um vetor de $\mathcal{C}(A)$.

[2v] **3.** a) Defina complemento ortogonal de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$.

b) Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $0 < \dim V < n$ e P a matriz de projeção sobre V. Justifique que V e $V^\perp$ são subespaços próprios de P e conclua que P é diagonalizável.

[4v] **4.** Uma empresa quer fabricar 3 tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3 nas suas fábricas A e B. Cada kg de P_1, P_2 e P_3 ocupa, respectivamente, 1.2 m^2, 1.25 m^2 e 2 m^2 e origina um lucro de 25 €, 30 € e 35 €. Independentemente do tipo de produto, a capacidade de produção máxima diária das fábricas A e B é de 900 kg e 450 kg, respectivamente. A fábrica B dispõe de 1500 m^2 para armazenar a produção diária e a fábrica A não tem limitações de espaço. A empresa comprometeu-se a vender diariamente a um cliente 300 kg de P_1 e 500 kg de P_2. Pretende-se determinar o plano diário de produção de forma a maximizar o lucro.

a) Formule o problema em termos de programação linear, atribuíndo significado às variáveis.

b) Escreva o problema na forma *standard*.

c) Verifique que o plano diário de produção que consiste em produzir na fábrica A 300 kg de P_1 e 500 kg de P_2 e na fábrica B 450 kg de P_3 corresponde a um vértice da região admissível do problema.

d) A opção anterior será uma solução ótima do problema? Justifique a sua resposta.