

2.32. Considere a variável aleatória contínua X com a seguinte função distribuição cumulativa, com $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$:

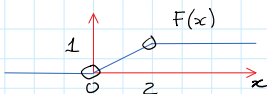
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

- Determine a e b .
- Determine a função densidade de probabilidade de X .
- Calcule o primeiro quartil da distribuição de X .
- Calcule $P(X < 1 | X \geq \frac{1}{2})$.
- Calcule:
 - $E[X]$ e $\text{Var}[X]$;
 - $E\left[\frac{1}{X+2}\right]$, $E[3X+2]$, $\text{Var}[2X+5]$ e $\text{Var}[2-3X]$.

SE X É V.A. CONTÍNUA ENTÃO $F(x)$ É CONTÍNUA (SLIDE 96)

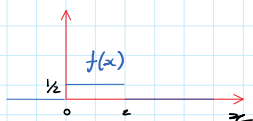
$$a) \text{ PARA } F \text{ SER CONTÍNUA, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = F(0) = b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = 2a + b = F(2) = 1 \end{cases}$$

PORTANTO $a = \frac{1}{2}$ E $b = 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2}x & , 0 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$


b) f É A FUNÇÃO DENSIDADE, QUE É NÃO-NEGATIVA
E QUE SATISFAZ $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ (SLIDE 92)

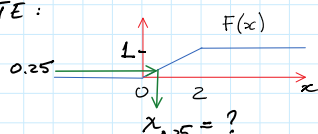
ASSIM, QUANDO $F'(x)$ EXISTE, $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2} & , 0 < x < 2 \\ 0 & , x > 2 \end{cases}$$


c) PEDE-SE $X_{0.25}$, O MENOR VALOR DE x

TAL QUE $F(x) \geq 0.25$ (SLIDE 105)

GEOMETRICAMENTE:



$$\text{ENTÃO, } F(x) = 0.25 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 0.25 \Leftrightarrow x = 0.5$$

CONCLUSÃO: $X_{0.25} = 0.5$

$$d) P(X < 1 | X \geq \frac{1}{2}) = \frac{P(X < 1 \cap X \geq \frac{1}{2})}{P(X \geq \frac{1}{2})} =$$

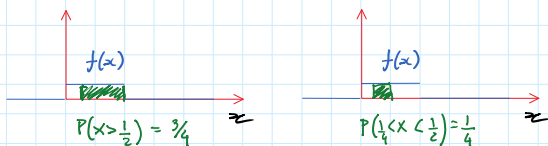
$$= \frac{P(\frac{1}{2} \leq X < 1)}{P(X \geq \frac{1}{2})} \stackrel{\text{C.A.}}{=} \frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - F(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

C.A. (NOTA: COMO X É CONTÍNUA, SUBSTITUIR
> POR $\geq$, < POR $\leq$, $\geq$ POR $>$, $\leq$ POR $<$
NÃO ALTERA O VALOR)

$$\text{ASSIM } P(\frac{1}{2} \leq X < 1) = F(1) - F(\frac{1}{2}) \quad (\text{SLIDE 88})$$

$$P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2})$$

GEOMETRICAMENTE:



Parâmetros (de funções) de uma v.a. X

$$E[\varphi(X)] = \begin{cases} \sum_i \varphi(x_i) p_i, & \text{se } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, & \text{se } X \text{ contínua} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 \quad (\mu = E[X])$$

$$\text{Var}[a + bX] = b^2 \text{Var}[X]$$

e) i) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ (slide 97)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x \cdot 0 dx \\ &= 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x dx + 0 = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

NOTA: PARA CALCULAR $E[X]$, É PRECISO CONHECER $f(x)$

$F \xrightarrow{\text{derivar}} f \xrightarrow{\text{multiplicar por } x \text{ e integrar}} E[X]$

$$\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (\text{slide 101 ou FORMULÁRIO})$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x^2 dx + 0 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{24} - 0 \right) = \frac{8}{6} \end{aligned}$$

$$\text{FINALMENTE, } \text{VAR}[X] = \frac{8}{6} - 1^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

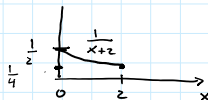
ii) $E\left[\frac{1}{X+2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+2} f(x) dx$ (slide 99 ou FORMULÁRIO)

$$= 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{2} dx + 0 = \frac{1}{2} \left[\ln(x+2) \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) &= \frac{1}{2} \ln \frac{4}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 = 0.3465 \end{aligned}$$

NOTA: $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$. ENTÃO, $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$

PROP. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$



$$E[3X+2] = 3E[X] + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[2X+5] &= 4 \text{VAR}[X] = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ &\quad \uparrow \text{FORMULÁRIO: } \text{VAR}[a+bX] = b^2 \text{VAR}[X] \end{aligned}$$

$$\text{VAR}[2-3X] = 9 \text{VAR}[X] = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$