

2.56. A probabilidade de um atirador acertar num alvo é $p = 1/4$.

- a) Seja X a variável aleatória que conta o número de tiros necessários até acertar, pela primeira vez, no alvo. Determine n tal que $P[X \leq n] > 0.8$.
- b) Quantos tiros espera o atirador dar até acertar pela primeira vez no alvo?

X v.a. NÚMERO DE TIROS ATÉ ACERTAR
PROVAS DE BERNOULLI "SUCESSO"

ENTÃO $X \sim \text{Geo}(p = \frac{1}{4})$

a) DETERMINAR n TALQUE $P(X \leq n) > 0.8$

$$n \quad P(X \leq n)$$

$$1 \quad P(X \leq 1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

$$2 \quad P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

$$3 \quad P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X=3) = \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{7}{16} + \frac{9}{64} = \frac{31}{64}$$

$$4 \quad P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + P(X=4) = \frac{31}{64} + \frac{1}{4} \times \frac{27}{64} = \frac{31}{64} + \frac{27}{256} = \frac{125}{256}$$

$$5 \quad P(X \leq 5) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 1 - \frac{3^5}{4^5} = 0.7626$$

$$6 \quad P(X \leq 6) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.922 > 0.8 \quad \text{RESPOSTA: } n=6$$

Considere-se de novo que temos **provas de Bernoulli independentes**, mas agora...

o número de provas não é fixo pois ... **pretendemos ir realizando provas até ocorrer** pela primeira vez o "sucesso".

Seja então X o número de provas necessárias até que ocorra pela primeira vez o "sucesso". Diz-se que X tem **distribuição geométrica** e costuma representar-se por $X \sim G(p)$.

OUTRA FORMA $P(X \leq n) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ QUE FACILITA OS CÁLCULOS:

C.A. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4} (1 - (\frac{3}{4})^n)}{1 - \frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n, n \geq 1$

ACERTA: 1 1 1 1 1

FALHA: 0 1 2 n-1

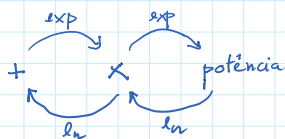
TOTAL: 1 2 3 ... n

$\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$ (série geométrica)

ALTERNATIVA: A EXPRESSÃO PARA $P(X \leq n)$ ACIMA PERMITE RESOLVER O PROBLEMA DIRECTAMENTE:

DETERMINAR n TALQUE $P(X \leq n) = 1 - q^n > 0.8$, $q = \frac{3}{4}$

ENTÃO $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0.2$, OU SEJA $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^n < \ln 0.2$. PORTANTO, $n \times \ln \frac{3}{4} < \ln 0.2$



ENTÃO $n > \frac{\ln 0.2}{\ln \frac{3}{4}} = 5.59$

O MENOR n TAL QUE $P(X \leq n) > 0.8$ É ENTÃO $n=6$, O MESMO VALOR OBTIDO ACIMA QUANDO SE CALCULAM $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$, ..., $P(X \leq 6)$.

b) $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ EM MÉDIA, ATIRA 4 VEZES ATÉ ACERTAR.

Geométrica	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots$	$0 < p < 1$ $(q = 1 - p)$	$E[X]$ $\frac{1}{p}$	$VAR[X]$ $\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$ $q e^t < 1$
------------	---------------------------------	------------------------------	-------------------------	-----------------------------	--