INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA[1]

Uma resolução do **1º teste de Matemática 1** de 2019/2020

1. Considere a função $f(x) = 2 - x + e^{x-1}$. [4.5v]

   (a) Determine eventuais assíntotas ao gráfico de f.
   Resolução:

   $D_f = \mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais.
   Determinação de assíntotas oblíquas $y = mx + b$.

   À direita $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-x+e^{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2}{x} - 1 + \frac{e^{x-1}}{x})$
   $= +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-1}}{x} \underbrace{\overbrace{=}^{\text{RC}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$.
   Logo, f não tem assíntota.

   À esquerda $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{2}{x} - 1 + \frac{e^{x-1}}{x}) = 0$. Logo, $m = -1$. $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2 + e^{x-1}) = 2$. Logo, f tem a assíntota $y = -x + 2$.

   (b) Estude f quanto à monotonia e extremos.
   Resolução:

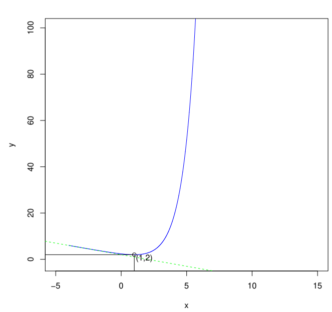
   $f'(x) = -1 + e^{x-1}$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$.

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

   f tem um mínimo relativo em $x = 1$ e $f(1) = 2$ é o mínimo.

   (c) Esboçe o gráfico de f e determine o contradomínio de f.
   Resolução:

   $f''(x) = e^{x-1} > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Logo, f tem a concavidade voltada para cima.



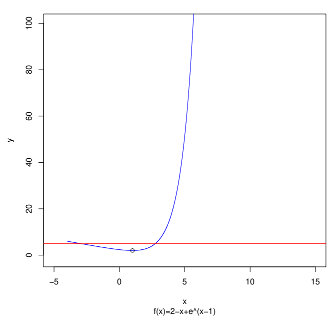
   $CD_f = [2, +\infty[$.

[1] O texto não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.

(d) Mostre que f não é invertível. Indique um intervalo I onde f é invertível e dê exemplo de um ponto do gráfico da função inversa de f restrita a I.

Resolução:

f não é invertível porque não é injectiva. Não é injectiva porque existem objectos diferentes com a mesma imagem, como se pode ver na figura abaixo, com a recta horizontal a cruzar o gráfico de f em mais do que um ponto.



Como f é estritamente crescente em $I = [1, +\infty[$ então é injectiva em I.

Ponto do gráfico da função inversa de f restrita a I (2,1).

(e) Considere a função $g(x) = \arcsin(2x)$. Determine a função $f[g(x)]$ e indique o seu domínio.

Resolução:

$f[g(x)] == 2 - \arcsin(2x) + e^{\arcsin(2x)-1}$

$D_{f[g(x)]} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, porque $-1 \leq 2x \leq 1$.

2. Um agricultor pretende cercar um pasto rectangular com 180 mil metros quadrados. Como um dos lados do pasto é adjacente a um rio, não há necessidade de cercar este lado. Escreva a expressão do perímetro da cerca em função do comprimento de um dos seus lados.

Resolução: [0.5v]

$180000 = xy$, em que x e y são os comprimentos dos lados do pasto

$$P(x) = 2x + \frac{180000}{x}.$$

3. Calcule: [2v]

(a) $\lim\limits_{x\to1^-} (x^2-1)\ln(1-x^2)$

Resolução:

$$\lim_{x\to1^-} (x^2-1)\ln(1-x^2) \underbrace{=}_{0\infty} \lim_{x\to1^-} \frac{\ln(1-x^2)}{\frac{1}{x^2-1}} \overbrace{\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}}}^{\text{RC}} \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}} =$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} -(x^2-1) = 0.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
Resolução:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} \overbrace{=}^{*} e^0 = 1.$$

$$* \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x \underbrace{=}_{0\infty} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \underbrace{\overbrace{=}^{\text{RC}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

4. Seja $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x-2}{\sqrt{3}})$ uma primitiva de f em $\mathbb{R}$. [1.5v]

(a) Determine f.
Resolução:

$$F'(x) = f(x) \text{ para } x\in\mathbb{R}.\ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{(\frac{x-2}{\sqrt{3}})'}{1+(\frac{x-2}{\sqrt{3}})^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{x-2}{\sqrt{3}})^2}$$
$$= \frac{1}{x^2-4x+7}.$$

(b) Indique a primitiva de f tal que $\frac{1}{3}$ é a ordenada na origem da recta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $x=2$.
Resolução:

A recta tangente ao gráfico de F no ponto de abcissa $x=2$ tem declive $F'(2) = f(2) = \frac{1}{3}$ e ordenada na origem igual a $\frac{1}{3}$. Assim, equação desta recta é $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

O ponto de tangência é $(2, F(2))$ e $F(2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Logo, a primitiva de f é $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x-2}{\sqrt{3}}) + C$ tal que $F(2) = 1$.

$F(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2-2}{\sqrt{3}}) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Ou seja, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x-2}{\sqrt{3}}) + 1$.

5. Calcule: [1.5v]

(a) $P\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$
Resolução:

$$P\frac{\sqrt{\ln x}}{x} = P\frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}} \overbrace{=}^{f^\alpha f'} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}.$$

(b) $P\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$.

Resolução:

$P\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\overbrace{=}^{*}\dfrac{t^2}{t+1}\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{2}P\dfrac{t}{t+1}=\dfrac{1}{2}P\dfrac{t+1-1}{t+1}=$
$\frac{1}{2}P(1-\frac{1}{t+1})=\frac{1}{2}(t-\ln|t+1|)=\frac{1}{2}(e^{2x}-\ln(e^{2x}+1))$.

* Mudança de variável $e^{2x}=t\Leftrightarrow 2x=\ln t\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln t$

$x'=\frac{1}{2t}$