Exercícios – Bloco 2

1- O modelo de Rayleigh tem sido usado para caracterizar situações no domínio das ciências biológicas em que poderão ocorrer valores "severos".
Vamos considerar X uma variável aleatória seguindo um modelo de Rayleigh numa forma muito simples, apenas com um parâmetro desconhecido, θ >0, com função densidade definida como:

$f(x\,|\,\theta)=\frac{x}{\theta}\exp\left[-\frac{x^2}{2\theta}\right]$ se x>0, e é nula nos restantes valores de

Sabe-se que $E[X]=\sqrt{\frac{\theta\pi}{2}}$ e $Var[X]=\frac{4-\pi}{2}\theta$

Considere que se tem uma amostra aleatória $(X_1, X_2, ..., X_n)$ associada a *X*.

a) Determine o estimador de θ calculado pelo método dos momentos**.**
b) Determine o estimador de máxima verosimilhança de θ.
c) Tendo observado a seguinte amostra extraída daquela população,

2.6 1.7 3.9 0.9 4.1 0.4 1.9 3.0 4.7 3.2 3.0 2.8 0.6 2.1 1.7 3.9 2.2 1.6 2.4 1.6
determine estimativas para θ (consulte o Anexo).

d) Suponha que é sugerido o seguinte estimador para θ, T=2 S^2, onde S^2 designa a variância amostral.
i) Explique sucintamente o que se pretende com os comandos do Anexo identificados por **A** e **B**.
ii) Com recurso ao *bootstrap*, indique uma estimativa do <u>valor médio de T</u> e um intervalo de confiança a 95% para θ.

Anexo

```
> amostra
[1] 2.6  1.7  3.9  0.9  4.1  0.4  1.9  3.0  4.7  3.2  3.0  2.8  0.6  2.1  1.7  3.9  2.2  1.6  2.4  1.6

> sum(amostra)                > sum(amostra^2)
[1] 48.3                        [1] 143.01

> # Metodologia bootstrap

A  > boot <-numeric(1000)
B  > for (i in 1:1000)   boot[i] <- 2*var(sample(amostra,replace=T))

> mean(boot)                    >var(boot)
[1] 2.617516                    [1] 0.4925298

> quantile(boot,prob=c(0.025,0.975))
```

2.5%	97.5%
1.335007	4.047878

2. (Exame *11.06.2015)* A densidade da velocidade absoluta de uma molécula é dada pela distribuição de Maxwell. Considere a função densidade de Maxwell, dependendo apenas de um parâmetro α (α >0), assim definida:

$$f(x) = \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \; ; \quad x \le 0$$

Considere que se tem uma amostra aleatória de dimensão *n* associada a esta variável, i.e, temos $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

a) Sabendo que $E[X] = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$ determine o estimador de α obtido pelo método dos momentos.

b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para α.

c) Supondo que observou a seguinte amostra de 20 valores da variável X.

8.55	8.56	6.89	4.14	7.85	44.96	7.03	4.12	10.73	9.36
9.63	16.88	10.68	15.93	1.05	4.23	3.08	10.35	8.35	12.28

i) Complete as letras, A e B, em falta no *output* dado abaixo.
ii) Face à amostra observada obtenha estimativas de α.

Output

```
> amostra
 [1]  8.55  8.56  6.89  4.14  7.85 44.96  7.03  4.12 10.73  9.36
[11]  9.63 16.88 10.68 15.93  1.05  4.23  3.08 10.35  8.35 12.28
> sum(amostra)
[1] 204.65
> mean(amostra)
[1] A
> sum(amostra*amostra)
[1] 3664.774
> var(amostra)
[1] B
```

3. (Exame *28.06.2015*) A incerteza da distribuição das mutações que provocam alterações nos estados das populações, levou a admitir que a grandeza X, que quantifica a mutação de um estado para outro, segue uma distribuição gama. Vamos simplificar aqui o problema e supor que a distribuição gama tem apenas um parâmetro desconhecido, β, sendo a função densidade assim definida $f(x|\beta)= \beta^2 x e^{-\beta x}$, $x>0$ e $\beta>0$.

Sabe-se que $E[X]=\frac{2}{\beta}$ e $Var[X]=\frac{2}{\beta^2}$

e) Determine o estimador de β calculado pelo método dos momentos**.**

f) Determine o estimador de máxima verosimilhança de β.

g) Tendo observado a seguinte amostra, de dimensão 60, extraída daquela população (e apresentada ordenada) explique detalhadamente como procederia para utilizar um teste do qui-quadrado para testar a hipótese de que X segue a distribuição indicada acima.

```
> sort(dados)
 [1]  0.14  1.30  1.55  1.68  2.16  2.39  2.42  2.56  2.57  2.90  3.05  3.26
[13]  3.32  3.33  3.34  3.35  3.69  3.69  3.84  3.89  4.04  4.08  4.18  4.36
[25]  4.39  4.63  5.08  5.22  5.26  5.33  5.33  5.42  5.42  5.73  5.75  5.77
[37]  5.81  5.86  6.02  6.42  6.58  6.88  7.56  7.66  8.16  8.53  8.66  8.89
[49]  8.89  8.91  9.22  9.61  9.68  9.95 10.15 10.43 10.92 13.15 13.98 14.27
```

Alguns cálculos:

```
> sum(dados)          > sum(dados*dados)
  [1] 350.61            [1] 2648.829
```

h) Suponha que é sugerido o seguinte estimador para β, $T=\frac{\sqrt{2}}{S}$, onde *S* designa o desvio padrão amostral.

i) Usando a <u>amostra dada acima</u> obtenha uma estimativa para β, usando este estimador.

ii) Escreva os comandos necessários para, recorrendo à metodologia *bootstrap* na amostra acima, obter um intervalo de confiança a 95% para β.