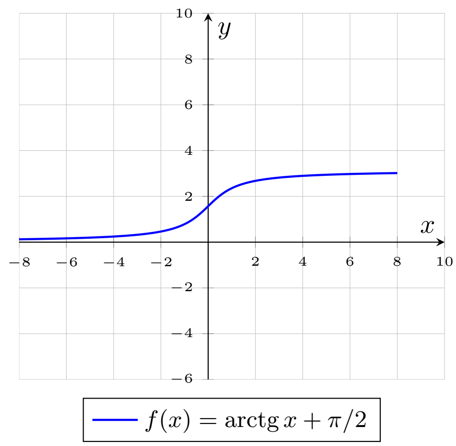
INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA[1]

2º exame de Matemática 1 - 23 de Julho 2021 - Duração 2h

JUSTIFIQUE ANALITICAMENTE AS RESPOSTAS

1. Considere a função $f(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}$ (figura abaixo). [9v]



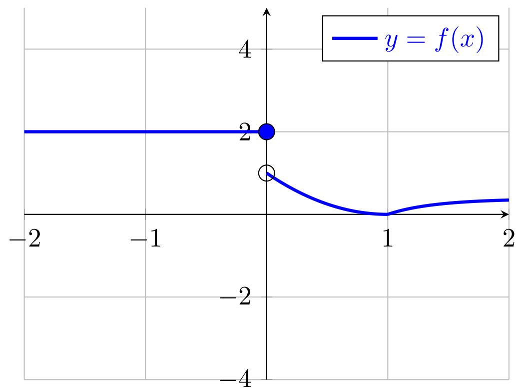
   (a) Indique, caso existam, as assimptotas ao gráfico de f.
   (b) Estude f quanto à monotonia e extremos.
   (c) Será que existem rectas tangentes ao gráfico de f horizontais? Escreva a equação de uma recta tangente so gráfico de f à sua escolha.
   (d) Estude f quanto à concavidade e pontos de inflexão.
   (e) Determine o contradomínio de f.
   (f) Justifique que f é invertível. Determine a função inversa de f, f^{-1}, e indique o seu domínio.
   (g) Mostre que $F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + x\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}x + 2$ é uma primitiva de f.

2. Calcule: [2.5v]

   (a) A primitiva de $x\,e^{-x}$ que em $x = 0$ assume o valor 1;
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left[(1-x^2) - (x^2-1)\right]\,dx$ e interprete geometricamente o seu valor.

3. Considere $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 0 \\ (x-1)^2 & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}\ln x & x > 1 \end{cases}$ (figura abaixo) e o integral indefinido $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ com $x \in \mathbb{R}$. [1.5v]

[1] O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.



Determine uma expressão para ϕ sem o símbolo do integral.

4. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. [5$v$]

   (a) Calcule $(A + ba)B^T$.

   (b) Calcule o ângulo entre a 1ª e a 3ª colunas de A.

   (c) Resolva o sistema $Ax = b$ e descreva geometricamente as suas equações.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. [1.5$v$]

   (a) Determine, caso exista, A^{-1}.

   (b) Determine os vectores resultantes da transformação de $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, por A e A^{-1}.

   (c) Qual é a relação entre os vectores obtidos na alínea anterior e x?

6. Considere A uma matriz invertível e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mostre que [0.5$v$]

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$