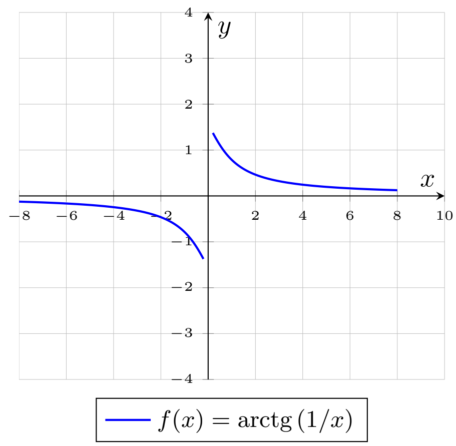
INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA[1]

3º exame de Matemática 1 - 15 de Setembro 2021 - Duração 2h

JUSTIFIQUE ANALITICAMENTE AS RESPOSTAS

1. Considere a função $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (figura abaixo). [$9v$]



   (a) Indique o domínio de f.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. Indique, caso existam, as assimptotas ao gráfico de f.

   (c) Estude f quanto à monotonia e extremos relativos.

   (d) Será que existem rectas tangentes ao gráfico de f horizontais? Escreva a equação de uma recta tangente ao gráfico de f à sua escolha.

   (e) Estude f quanto à concavidade e pontos de inflexão.

   (f) Determine o contradomínio de f.

   (g) Calcule uma primitiva de f.

[$2v$]

2. (a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{2-x}$.

   (b) Considere $f(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, com $x \in]-2, +\infty[$, e $F(x) = \dfrac{3x+2}{x+2} + 1$. Justifique que F é a primitiva de f que em $x = 0$ assume o valor 2.

3. Seja $\phi(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \left(e^t - t^3\right)\, dt$, com $x \in \mathbb{R}$. [$2v$]

   (a) Determine uma expressão para ϕ sem o símbolo do integral.

   (b) Calcule $\phi(1)$ e interprete geometricamente o seu valor.

[1] O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.

4. Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$. [$5v$]

   (a) Calcule $(A - 2I)B^T$.

   (b) Calcule a distância entre a 1ª e a 3ª colunas de A.

   (c) Resolva o sistema $Ax = 0$ e descreva geometricamente as suas equações.

   (d) Justifique que $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ é a inversa de A.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. [$1.5v$]

   (a) Determine o vector resultante da transformação de $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, por A.

   (b) Qual é a relação entre o vector obtido na alínea anterior e x?

6. Considere A uma matriz invertível. Mostre que [$0.5v$]

$$(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$