# Exercícios

## Generalidades sobre funções

1. Exprima a área de um quadrado em função do lado.

2. Exprima a área de um rectângulo de perímetro 10 em função do respectivo comprimento.

3. Exprima a área de um triângulo equilátero em função do lado.

4. Determine o declive da recta que passa nos pontos:

   (a) $(1, 2)$ e $(3, 7)$.

   (b) $(-1, 5)$ e $(2, 2)$.

   (c) $(1, 2)$ e $(1, 5)$.

5. Represente graficamente a recta declive 2 que passa em $(0, 3)$ e escreva uma equação para essa recta.

6. Determine uma equação da recta que passa nos pontos:

   (a) $(0, 0)$ e $(1, -2)$.

   (b) $(3, 4)$ e $(4, 7)$.

7. Considere a função $f(x) = 4 + 3x - x^2$ e calcule:

   (a) $f(0)$.

   (b) $f(2)$.

   (c) $f(-1)$.

   (d) $f(4)$.

(e) $f(a+h)-f(a)$.

(f) $f(1+h)-f(1)$.

Será $f$ injectiva? Justifique.

8. Represente graficamente as seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 2, & x < 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \geq 0 \\ x^2+2, & x < 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = |x+2|$.

(d) $f(x) = e^{-x}$.

(e) $f(x) = -e^{x}$.

(f) $f(x) = 1-e^{-x}$.

9. Determine o domínio das seguintes funções.

(a) $y = \dfrac{x^2-1}{x+3}$.

(b) $y = \sqrt{1+3x}$.

(c) $y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$.

(d) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x}}$.

(e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(f) $y = \sqrt{x^2+1}$.

(g) $y = \dfrac{1}{|x|+1}$.

(h) $y = \dfrac{1}{|x|+x}$.

(i) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

(j) $y = \ln(x^2 - 4)$.

(k) $y = \dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$.

(l) $y = \ln(\ln x)$.

(m) $y = \sqrt{\ln(x^2 - 2x)}$.

(n) $y = \sqrt{e^x - e^{2x}}$.

(o) $y = \ln x - \ln(x+1)$.

(p) $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

(q) $y = \sin(x^2 - 1)$.

10. Considere $f(x) = 3 - 2x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Indique a expressão de:

(a) $f \circ g$.

(b) $g \circ f$.

(c) $f \cdot g$.

(d) $\dfrac{1}{g}$.

(e) $\dfrac{f}{g}$.

(f) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

11. Considere $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $g(x) = 2\sin(x+1)$ e $h(x) = (x+1)^2 - x$. Indique a expressão de:

(a) $f \circ g$.

(b) $f \circ g \circ h$.

(c) $\dfrac{f+g}{h}$.

(d) $\dfrac{h-g}{h \circ f}$.

(e) $f(x^2)$.

(f) $g(\sin x)$.

12. Indique funções $f$ e $g$ tais que

    (a) $(f \circ g)(x) = x$.

    (b) $(f \circ g)(x) = 2x$.

13. Determine a função inversa das seguintes funções:

    (a) $y = 3\,x - 5$.

    (b) $y = 2 + \sqrt{x+1}$.

    (c) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

    (d) $y = 3\,e^{2x}$.

    (e) $y = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

    (f) $y = \cos(x - \pi)$.

    (g) $y = 3\arcsin(2x)$.

14. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

    (a) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$.

    (b) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$

    (c) $\arcsin(\sin \pi)$.

    (d) $\cos(\arcsin 0.6)$

    (e) $\sin(2 \arcsin 0.6)$

    (f) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi)$

    (g) $\sin(\arcsin(0.123))$.

**Soluções:** 9 a) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ b) $[-\frac{1}{3}, +\infty[$ c) $[0, 1]$ d) $[-2, 0[\cup[1, +\infty[$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{R}$ g) $\mathbb{R}$ h) $]0, +[\infty[$ i) $]-\infty, 1[$ j) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ k) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ l) $]1, +\infty[$ m) $]-\infty, 1-\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{2}, +\infty[$ n) $]-\infty, 0]$ o) $]0, +\infty[$ p) $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ q) $\mathbb{R}$

## Limites

15. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+2}$.

(b) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+2x+5}$.

(c) $\lim_{x\to \pi} \sin x$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}$.

(e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x}$.

(f) $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{3-x}$, $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3-x}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{3-x}$.

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+x}$.

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2(x-1)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2(x-1)}$.

(i) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-4}{8-x^3}$.

(j) $\lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+3x-2}{x-1}$.

(k) $\lim_{x\to -\infty} (x^3-x)$, $\lim_{x\to +\infty} (x^3-x)$.

(l) $\lim_{x\to -\infty} (4x^4-1)$, $\lim_{x\to +\infty} (4x^4-1)$.

(m) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{3x^2-1}$.

(n) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x}{x-2}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x}{x-2}$.

(o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3-x^5}{2x^4-x}$.

(p) $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{2-x^3}$.

(q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

(r) $\lim_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x})$.

(s) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

(t) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$.

16. Calcule, caso exista,

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$, com $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$, com $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1, \\ x^2, & x \leq .1 \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$, com $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ -x+1, & x \leq 0. \end{cases}$

(d) $\lim_{x\to 1} f(x)$, com $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \\ \frac{1}{(x-2)^2}, & x < 1. \end{cases}$

(e) $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$, com $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 2, \\ 6-x^2, & x \geq 2. \end{cases}$

17. Sabendo que $\lim_{x\to a} f(x) = 2$, $\lim_{x\to a} g(x) = \frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to a} h(x) = 0$, indique

(a) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$.

(b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{f(x)}$.

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{g^2(x)}{h(x)}$.

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)+h(x)}{6g(x)-f(x)}$.

**Soluções:**

15 a) 1/3 b) $\sqrt{20}$ c) 0 d) 1/2 e) $+\infty$ f) $-\infty$ ; $+\infty$ ; 0 ; 0 g) 1 h) 2 ; $+\infty$ i) $\infty$ j) 1 k) $-\infty$ ; $+\infty$ l) $\infty$ ; $+\infty$ m) 1/3 n) $+\infty$ o) $-\infty$ p) 0 q) $+\infty$ r) $+\infty$ s) $-1$ t) 1

16 a) 0 b) Não existe c) Não existe d) 1 e) 2 ; 2

17 a) 7/3 b) 6 c) 0 d) $\infty$ e) $\infty$.

## Derivadas

18. Derive:

(a) $f(x) = 3x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 3.$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $f(x) = \frac{1}{x^n}.$

(c) $f(x) = \frac{2}{x+1}.$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $f(x) = \sqrt{x^3}.$

(e) $f(x) = x \sin x.$

(f) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}.$

(g) $f(x) = \frac{1}{\cos(4x)}.$

(h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}.$

(i) $f(x) = \ln x.$

(j) $f(x) = e^x.$

(k) $f(x) = \frac{e^x}{x}.$

(l) $f(x) = \ln^3 x.$

(m) $f(x) = \ln(x^3).$

(n) $f(x) = e^{\sqrt{x}}.$

(o) $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 4).$

(p) $f(x) = \ln^3(xe^{x^2+1} + 1).$

**Soluções:**

18 a) $15x^4 - x$ b) $-\frac{1}{x^2}$ ; $-\frac{2}{x^3}$ ; $-\frac{n}{x^{n+1}}$ c) $-\frac{2}{(x+1)^2}$ d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ ; $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

e) $\sin x + x\cos x$ f) $\frac{-x-1}{(x-1)^3}$ g) $\frac{4\sin(4x)}{\cos^2(4x)}$ h) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ i) $\frac{1}{x}$ j) $e^x$

k) $\frac{xe^x - e^x}{x^2}$ l) $\frac{3\ln^2 x}{x}$ m) $\frac{3}{x}$ n) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ o) $e^{-x}(-x^2 - 2)$ p)
$3\ln^2\left(xe^{x^2+1} + 1\right)\frac{e^{x^2+1}(1+2x^2)}{xe^{x^2+1}+1}$

19. Calcule por definição as derivadas de $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 4 + 3x - x^2$.

20. Investigue a existência de derivadas laterais e conclua sobre a existência de derivada para

    (a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ em $x = 0$.

    (b) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1, \\ x^2, & x \leq 1, \end{cases}$ em $x = 1$.

    (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \\ \frac{1}{(x-2)^2}, & x < 1, \end{cases}$ em $x = 1$.

21. Sejam $f$ e $g$ duas funções reais de domínio $\mathbb{R}$. Mostre que se $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ então:

    (a) $f = g + k$ para alguma constante $k$.

    (b) Se $f(0) = g(0)$ então $f = g$.

22. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de:

    (a) $f(x) = x^8 + 2x^2 + 1$ no ponto $(1, 4)$;

    (b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+1}$ no ponto de abcissa 1;

    (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ no ponto $(1, f(1))$;

    (d) $f(x) = x^3$ no ponto $(0, f(0))$.

23. Determine o(s) ponto(s) do gráfico de $y = x^3$ onde a recta tangente é paralela à recta $y = 3x - 2$.

24. O raio de um círculo é alterado de 2 para 2.01. Calcule:

    (a) A correspondente alteração na área.

(b) O valor aproximado da alteração da área recorrendo à aproximação linear.

25. Calcule a segunda derivada indicando o respectivo domínio das funções:

(a) $f(x) = 3x - 1$.

(b) $f(x) = 2 - 5x^2$.

(c) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

(d) $f(x) = \ln(x + x^2)$.

(e) $f(x) = \sin^2 x$.

**Soluções:**

20 a) Não existem. b) $\nexists f'_d(1),\ f'_e(1) = 2,\ \nexists f'(1)$ c) $f'_d(1) = -2$, $f'_e(1) = 2$, $\nexists f'(1)$

22 a) $y = 12x - 8$ b) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{13}{16}$ c) $y = x - 1$ d) $y = 0$ 23 $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ 24 a) 0.0401 b) 0.04 25 a) 0 b) $-10$ c) $\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6}{x^4}$ d) $\dfrac{-2x^2 - 2x - 1}{(x + x^2)^2}$ e) $2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

## Regra de Cauchy

26. Calcule

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin(2x)}$.

(d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{1-x}$.

(e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3}{1-x^3}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x(1+x)}$.

(g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + x^2}{\ln x}$.

(h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{2x^2+x+1}$.

(i) $\lim_{x\to \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

(j) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

(k) $\lim_{x\to +\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}(2x)}$.

(o) $\lim_{x\to +\infty} x\, e^{-x}$.

(p) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

(q) $\lim_{x\to +\infty} \left(e^x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

(r) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

(s) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

(t) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

(u) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$.

(w) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

(x) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$.

(y) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln^2 x)^x$.

**Soluções:**

26 a) 1 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $+\infty$ e) $-3$ f) 1 g) $+\infty$ h) 0 i) 1

j) 0 k) -1 l) 0 m) 1 n) $\frac{1}{2}$ o) 0 p) 0 q) $+\infty$ r) $-\frac{1}{2}$ s)

1 t) $+\infty$ u) $e^5$ v) $e^5$ w) $+\infty$ x) 1 y) 1.

## Estudo de funções

27. Estude as seguintes funções:

(a) $f(x)=2x^2-3x+4$.

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

(c) $f(x)=-\dfrac{2}{(x-2)^2}$.

(d) $f(x)=x^4-2x^2$.

(e) $f(x)=x\,e^x$.

(f) $f(x)=x^2\ln x$.

(g) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}$.

(h) $f(x)=x-2\operatorname{arctg}(x-1)$.

28. (a) De entre os rectângulos de área igual a 16, qual o de perímetro mínimo?

(b) Sobre um segmento de recta de 1 metro de comprimento pretende-se construir um triângulo com 60 cm de altura. Como proceder de modo a obter um triângulo de perímetro mínimo?

## Primitivas

29. Mostre que $F(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) + 6$ é uma primitiva de $f(x) = \frac{-2}{1-x^2}$.

30. Primitive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^2 + 4x^5$.

   (b) $f(x) = (x-1)^2$.

   (c) $f(x) = x^2 - \cos(2x)$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

   (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$.

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{3x-4}$.

   (g) $f(x) = x^3 - e^{5x}$.

   (h) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

   (i) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

   (j) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

   (k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

   (l) $f(x) = \operatorname{tg} x \ln(\cos x)$.

   (m) $f(x) = x \sin x$.

   (n) $f(x) = e^x \sin x$.

   (o) $f(x) = \cos x \, \sin x$.

   (p) $f(x) = \arcsin x$.

   (q) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

   (r) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}$.

   (s) $f(x) = x \sec^2 x$.

(t) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

(u) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

(v) $f(x) = (e^x + 2)^2$.

31. Determine $F(x)$ tal que $F'(x) = e^x + 2x^3$ e $F(0) = 3$.

32. Determine $F(x)$ tal que $F''(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$, $F'(0) = 2$ e $F(0) = 3$.

**Soluções:**

30. a) $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^6$ b) $\frac{(x-1)^3}{3}$ c) $\frac{x^3}{3} - \frac{\sin(2x)}{2}$ d) $\ln|x-2|$ e) $\frac{\ln(x^2+3)}{2}$ f) $\frac{1}{3}\ln|3x-4|$ g) $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{5}e^{5x}$ h) $\frac{1}{2}\ln^2(1+x)$ i) $-\frac{1}{2(2x+1)}$ j) $2\sqrt{\sin x}$ k) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ l) $-\frac{1}{2}\ln^2(\cos x)$ m) $-x\cos x + \sin x$ n) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ o) $-\frac{\cos^2 x}{2}$ p) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ q) $2\,e^{\sqrt{x}}$ r) $2\ln(\sqrt{x}-1)$ s) $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$ t) $-xe^{-x} - e^{-x}$ u) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)$ v) $\frac{e^{2x}}{2} + 4e^x + 4x$

31. $e^x + \frac{x^4}{2} + 2$ 32. $\frac{k}{2}x^2 + 2x + 3$

## Cálculo integral

33. Justifique, sem calcular, qual dos seguintes integrais é maior:

    (a) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$ e $\int_0^1 x^3\, dx$.

    (b) $\int_1^e x\, dx$ e $\int_1^e \ln x\, dx$.

34. Sabendo que $\displaystyle\int_a^b 1\, dx = b - a$ e que $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ indique utilizando as propriedades dos integrais o valor de $\displaystyle\int_{-1}^2 |3x - 1|\, dx$.

35. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

36. Calcule os seguintes integrais.

    (a) $\displaystyle\int_a^b k dx$ com $k \in \mathbb{R}$ uma constante.

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(2x^2 + x + 1\right)\, dx$

    (c) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x+1}\, dx$.

    (d) $\displaystyle\int_1^3 e^{-x}\, dx$.

    (e) $\displaystyle\int_0^3 |2 - x|\, dx$.

    (f) $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$.

    (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$.

    (h) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x}$.

(i) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

(j) $\displaystyle\int_{e}^{-1} \frac{x+10}{4x^2}dx$.

(k) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{x^2+1}dx$.

(l) $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$.

(m) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx \text{ com } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{x+3}{2}, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$

(n) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\sqrt{2-x} + \frac{1}{x}\right) dx$.

(o) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2-\pi)\,dx$.

(p) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{x^3-4}\,dx$.

(q) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$.

(r) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\sin x\,dx$.

(s) $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

(t) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^x\,dx$.

(u) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} x\,dx$.

(v) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \arcsin x\,dx$.

37. Represente graficamente e calcule a área de:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2, \quad -x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \quad x^2 - 1 \leq y \leq \arccos x\}$.

38. Determine a área da região do plano delimitada por:

(a) $y = x$ e $y = x^3$.

(b) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = 2\pi$.

39. Calcule o volume do sólido de revolução obtido por rotação em torno do eixo $xx$ das regiões planas delimitadas por:

(a) $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 2$.

(b) $y = \sqrt{x}$ e $y = \frac{x}{2}$.

40. Calcule o volume da esfera de raio $r$.

41. Considere as regiões do plano delimitadas por:

(a) $y = |x|$, $y = -x^2 + 6$ e $y + x^2 = 2$.

(b) $x = y^2$ e $x^2 = -8y$.

(c) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = \ln 2$.

(d) $y = x - |x - 1|$, $y = 2x^2 - 3x - 1$.

Represente-as graficamente, calcule a respectiva área e o volume do sólido de revolução obtido por rotação dessas regiões em torno do eixo dos $xx$.

Nota: em (d) não calcule o volume.

42. Calcule a àrea da região $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq \dfrac{1}{x}, \ 0 \leq y \leq 4x\right\}$ e o volume do sólido de revolução obtido por rotação de $R$ em torno do eixo dos $xx$.

**Soluções:** 36 a) $k(b-a)$ b) $\frac{13}{6}$ c) $\frac{2}{3}(\sqrt{7^3}-\sqrt{27})$ d) $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}$ e) $\frac{5}{2}$ f) 1 g) $\frac{\pi^2}{32}$ h) $\ln\frac{4}{3}$ i) $\pi$ j) $\frac{5}{2}e-\frac{3}{2}$ k) $\ln 2+\frac{3}{4}\pi$ l)-4 m) $\frac{43}{12}$ n) $\ln 2+\frac{2}{3}$ o) 0 p) $\frac{1}{3}(\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e^4})$ q) $\sqrt{e}-1$ r) $\pi+\frac{3}{2}$ s) $\frac{-1}{\ln 2}-1$ t) $e-2$ u) 0 v) $1-\frac{\pi}{2}$. 37 - a) $\frac{8+4\sqrt{2}}{3}$ b) $\pi+\frac{4}{3}$. 38 - a) $\frac{1}{2}$ b) $4\sqrt{2}$. 39 - a) $\frac{32}{5}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi$. 40 $\frac{4}{3}\pi r^3$. 41 - a) Área = $\frac{37}{3}$ Volume = $\frac{32}{3}\pi$ b) Área = $\frac{8}{3}$ Volume = $\frac{24}{5}\pi$ c) Área = $\frac{1}{2}$ Volume = $\frac{15}{8}\pi$ d) Área = $\frac{11}{3}$. 42 Área = $\frac{1}{6}+\ln 2$ Volume = $\frac{22}{15}$.

## Integral indefinido

43. Considere $f(x)=\begin{cases} 2, & 0\le x<1,\\ 0, & 1\le x<3,\\ -1, & 3\le x\le 4,\end{cases}$ e seja $F(x)$ o integral indefinido de $f(x)$ (com origem em $x=0$). Determine uma expressão analítica para $F(x)$.

44. Seja $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3$. Determine uma expressão analítica para $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt$, $x\in[-1,2]$.

45. Considere as funções $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ e $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt$, $x\in[-1,1]$.

    (a) Indique, justificando, $F'(x)$.

    (b) Determine uma expressão analítica para $F(x)$.

46. Considere $f(x)=\begin{cases} 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & 1\le x<2,\\ (2-x)^2, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

    (a) Determine uma expressão analítica para $F(x)=\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)dt$.

    (b) Calcule justificando $F'(x)$.

47. Considere a função $F(x)=\displaystyle\int_{0}^{x} te^t dt$, $x\in[0,1]$.

(a) Calcule $F(1)$.

(b) Calcule $F''(x)$.

48. Calcule $\left(x\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt\right)'$, $x \in \mathbb{R}$.

49. Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$.

(a) Determine $f(x)$.

(b) Mostre sem calcular o integral que $\displaystyle\int_4^9 f(t)dt = 2e^3 - e^2$.

**Soluções:** 43 $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 3 \\ 5 - x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$. 44 $\frac{x^4-1}{4}$. 45 - a) $F'(x) = f(x)$ em [-1,1] porque $f(x)$ é contínua em [-1,1] b) $f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$. 46 - a) $F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4x + \frac{9}{2}, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$ b) $F'(x) = f(x)$ em [0,4] porque $f(x)$ é contínua em [0,4]. 47 - a) 1 b) $F''(x) = (1 + x)e^x$. $F'(x) = f(x)$ em [0,1] porque $f(x)$ é contínua em [0,1]. 48 $1 - \cos x - x \sin x$. 49 - a)$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2}$ b) Seja $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. $F(9) - F(4) = 2e^3 - e^2$.

## Vectores

50. Calcule as normas dos seguintes vectores.

    (a) $(1,-1,2)$

    (b) $(-1,0,\pi,0)$

    (c) $(5,0,1,0,1,3)$

51. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

    (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

    (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

    (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

52. Determine todos os vectores unitários que fazem ângulos de $\frac{\pi}{3}$ com cada um dos seguintes pares de vectores.

    (a) $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

    (b) $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$.

53. Indique um vector não nulo que seja ortogonal a ambos os vectores de cada um dos seguintes pares.

    (a) $(1,0,1)$ e $(1,1,-1)$.

    (b) $(1,-1,2)$ e $(2,1,-1)$.

54. Indique dois vectores não nulos ortogonais entre si e ortogonais ao vector de cada uma das alíneas seguintes.

    (a) $(1,1,1)$.

    (b) $(1,2,1,-3)$.

55. Sejam $x$ e $y$ vectores de $\mathbb{R}^m$. Prove que:

(a) $\|x+y\| = \|x-y\|$ se e só se $x$ e $y$ são ortogonais.

(b) Os vectores $x+y$ e $x-y$ são ortogonais se e só se $\|x\| = \|y\|$.

(c) Se $x$ e $y$ são ortogonais então $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(d) Os vectores $x$ e $y$ são unitários e ortogonais então $\|x-y\| = \sqrt{2}$.

56. Determine a projeção ortogonal do vetor $(1,4)$ sobre o vetor $(-1,1)$.

57. Determine a projeção ortogonal do vetor $(1,4,1)$ sobre a reta que passa na origem e contém o vetor $(1,1,1)$.

58. Identifique o ponto da bissectriz dos quadrantes pares à menor distância de $u=(0,2)$ e indique o valor dessa distância.

59. Determine a distância de $P=(1,2,3)$ ao plano de equação $x-z=0$.

60. Considere os vetores $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,1)$ e $b=(2,3,5)$.

(a) Determine um vetor ortogonal aos vetores $u$ e $v$.

(b) Determine a distância de $b$ ao plano que passa na origem e contém as direções $u$ e $v$.

61. Considere o triângulo $\Delta$ de vértices $A=(1,0,0)$, $B=(0,\sqrt{2},1)$ e $C=(0,0,1)$.

(a) Determine os comprimentos dos lados de $\Delta$.

(b) Calcule os ângulos internos de $\Delta$.

(c) Determine um vetor unitário ortogonal aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(d) Determine a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{AB}$.

(e) Determine a área de $\Delta$.

**Soluções:** 50 a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{1+\pi^2}$ c) 6. 51 a) $\sqrt{5}$ b) 3 c) $\sqrt{51}$. 52 a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ b) $(\frac{\sqrt{2}+2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{4})$ e $(\frac{\sqrt{2}-2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{4})$. 53 a) $(-1, 2, 1)$ b) $(-1, 5, 3)$. 54 a) $(1, 1, -2)$ b) $(1, 2, -5, 0)$. 56 $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. 57 (2,2,2). 58 (1,1) e $\sqrt{2}$. 59 $\sqrt{2}$. 60 a) (-1,1,-1) b) $\frac{4}{3}\sqrt{65}$. 61 a) $\bar{AB} = 2$ e $\bar{AC} = \bar{BC} = \sqrt{2}$ b) $\widehat{AB, AC} = \widehat{BA, BC} = \frac{\pi}{4}$ e $\widehat{CB, CA}) = \frac{\pi}{2}$ c) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ d) $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ e) 1.

### Cálculo matricial e sistemas lineares

62. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível:

(a) $(5A - A) - (B - 2B)$.

(b) $(2A - B)^T - C$.

(c) $(2(A^T - C)^T + B)^T$.

(d) $(B^T - C)^T + 2B^T$.

(e) $D + D^T$.

(f) $D - D^T$.

(g) $AB^T$.

(h) $B^T B$.

(i) $CA$ e $AC$.

(j) $(BCA)^T$ e $(BC + D)^T$.

(k) $D^3$.

63. Identifique, se existirem, escalares $\alpha, \beta$ tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

64. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule, $Ab + Ib$, $(A + I)b$, $(A + A^T)2b$ e $b^T b$.

(b) Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

65. Calcule $B^3$ com $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

66. Determine os vértices do triângulo obtido a partir do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$ e $(5, 5)$ por uma simetria relativamente à reta $y = 2x$.

Interprete o resultado obtido num sistema de eixos.

67. Determine os vértices do cubo representado na figura após uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno do eixo dos $xx$.

1

1

1

68. Verifique que $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

69. Verifique que a inversa da matriz de simetria relativamente à reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem com direção $v$ é a própria matriz e interprete o resultado.

70. Verifique que a inversa da matriz de rotação em torno do eixo dos $zz$ em $\mathbb{R}^3$, $R_{z,\theta}$, é a matriz $R_{z,-\theta}$ e interprete o resultado.

71. Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes invertíveis da mesma ordem.

(a) Mostre que $A^{-1}(A + B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

(b) Mostre que $A^3BC^{-1}$ é invertível e indique a sua inversa.

(c) Prove que se $AB = AC$ então $B = C$.

72. Resolva os seguintes sistemas lineares.

(a) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(d) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(f) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

73. Discuta os sistemas $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

74. Determine todos os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

75. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma matriz $X$ tal que $AX = 6\,I$, onde $I$ denota a matriz identidade.

(b) Justifique $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e utilize a inversa para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

76. Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis, e em caso afirmativo, determine a sua inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

**Soluções:** 62 a) $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 18 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ d) Não está definido. e) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 39 & -21 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 29 & 14 & -3 \\ 14 & 25 & 16 \\ -3 & 16 & 17 \end{bmatrix}$

i) $CA = \begin{bmatrix} -4 & -14 & -2 \\ 1 & -8 & -1 \\ -17 & -25 & -4 \end{bmatrix}$ e $AC = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -15 \end{bmatrix}$ j) $(BCA)^T \begin{bmatrix} -33 & 57 \\ -127 & 96 \\ -18 & 15 \end{bmatrix}$ e $(BC+D)^T = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -16 & -19 \end{bmatrix}$ k). $\begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$ 63) $\alpha = -3$ e $\beta = 1/2$ 64) a) $Ab + Ib = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$, $(A+I)b = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$,

$(A + A^T)2b = \begin{bmatrix} 32 \\ -30 \\ 28 \end{bmatrix}$, $b^Tb = 14$. b) $x_1 = 3/10$, $x_2 = -6/5$ e $x_3 = 7/5$. 65 . $\begin{bmatrix} 20 & -4 & -1 \\ 10 & 8 & -23 \\ 15 & 10 & 10 \end{bmatrix}$. 66 $S_v = \dfrac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix}$ é a matriz de simetria com respeito à recta com o vector $v = (v_1, v_2)$. Fazendo $v = (1, 2)$ e sendo $a = (0, 0)$, $b = (5, 0)$ e $c = (5, 5)$, vem $a' = (0, 0)$, $b' = (-3, 4)$ e $c' = (1, 7)$. 67 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/6 & -sin\pi/6 \\ 0 & sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação em torno do eixo dos $xx$. Sendo $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 0, 0)$, $c = (1, 1, 0)$, $d = (0, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$, $f = (1, 0, 1)$, $g = (1, 1, 1)$ e $h = (0, 1, 1)$, vem $a' = (0, 0, 0)$, $b' = (1, 0, 0)$, $c' = (1, \sqrt{3}/2, 0)$, $d' = (0, \sqrt{3}/2, 1/2)$, $e' = (0, -1/2, \sqrt{3}/2)$, $f' = (1, -1/2, \sqrt{3}/2)$, $g' = (1, (\sqrt{3} - 1)/2, \sqrt{(\sqrt{3} + 1)/2})$ e $h' = (0, (\sqrt{3} - 1)/2, \sqrt{(\sqrt{3} + 1)/2})$. 68 69 70 71 72 a) $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{array}{|rcl} x_1 & = & 4 + 2x_2 \\ x_2 & = & \forall \\ x_3 & = & 3 \\ x_4 & = & -1 \end{array} \right\}$ b) Impossível. c) $S = \{(3, 3/2)\}$ d) $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{array}{|rcl} x_1 & = & 2 - x_3 \\ x_2 & = & -1 - x_3 \\ x_3 & = & \forall \end{array} \right\}$ e) $S = \{(-1, 1, 0)\}$

f) $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \left| \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1/2 + x_3/2 - (3/2)x_4 \\ x_2 & = & \forall \\ x_3 & = & \forall \\ x_4 & = & \forall \end{array} \right. \right\}$ g) $S = \{(0,1)\}$ 73 a) $\alpha = 2$ Impossível, $\alpha \neq 2$ Determinado b) $\alpha \neq 3$ Determinado para todo o $\beta$, $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ Indeterminado, $\alpha = 3$ e $\beta \neq 1$ Impossível c) $\alpha = -1$ Impossível, $\alpha = 1$ Indeterminado, $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ Determinado d) $\beta \neq 1$ Impossível para todo o $\alpha$, $\beta = 1$ e $\alpha = -5$ Impossível, $\beta = 1$ e $\alpha \neq -5$ Determinado. 74 $(0, -1, 2, 4)$ e $(-10/3, -7/3, 2, 2/3)$. 75 a) $X = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$. 76 a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) Não é invertível c) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.