Matemáticaı - 2021/22

Aula 11 Out

Isabel Martins

Sinopse

Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

Pontos e vectores

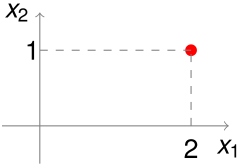
$x = (2, 1)$ pode ser

(a) o ponto de coordenadas (2,1)

Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

(a) o ponto de coordenadas (2,1)



(a)

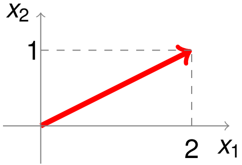
Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

(b) o vector com extremidade inicial (0,0) e extremidade final (2,1)



(b)

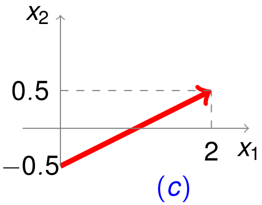
Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

(c) o vector aplicado no ponto (a, b) com extremidade final $(a + 2, b + 1)$
(por ex: o vector aplicado no ponto (0,-0.5) com extremidade final (2,0.5))



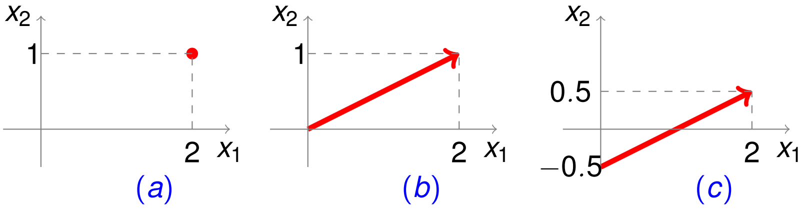
Pontos e vectores

$x = (2, 1)$ pode ser

(a) o ponto de coordenadas (2,1)

(b) o vector com extremidade inicial (0,0) e extremidade final (2,1)

(c) o vector aplicado no ponto (a, b) com extremidade final $(a + 2, b + 1)$
(por ex: o vector aplicado no ponto (0,-0.5) com extremidade final (2,0.5))

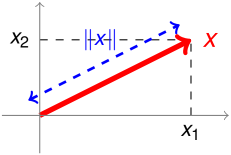


Norma

Norma de um vector

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

A *norma* de x é
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$



Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$

Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow$

Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\lambda x\| =$

Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

Versor de um vector

Seja o vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ não nulo de $\mathbb{R}^n$.

O *versor* de x é o vector unitário com a mesma direcção e sentido que x

Propriedades da norma

Seja x vector de $\mathbb{R}^n$.

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

Versor de um vector

Seja o vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ não nulo de $\mathbb{R}^n$.

O *versor de x* é o vector unitário com a mesma direcção e sentido que x

$$\text{vers}\,(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Propriedades da norma

Seja o vector $x = (3, -4)$

Propriedades da norma

Seja o vector $x = (3, -4)$

$\|(3, -4)\| =$

Propriedades da norma

Seja o vector $x = (3, -4)$

$$\|(3, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Propriedades da norma

Seja o vector $x = (3, -4)$

$\|(3, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\text{vers}(x) =$

Propriedades da norma

Seja o vector $x = (3, -4)$

$\|(3, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\text{vers}(x) = \frac{x}{\|x\|} =$

Propriedades da norma

Seja o vector $x = (3, -4)$

$\|(3, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\text{vers}(x) = \frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

Distância entre vectores

Distância entre dois vectores

Sejam os vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

A *distância* entre x e y é

Distância entre vectores

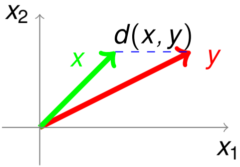
Distância entre dois vectores

Sejam os vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

A *distância* entre x e y é

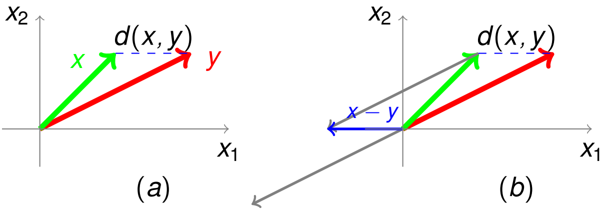
$$\mathrm{d}\,(x, y) = \|x - y\| \;\; (\text{ou} \;\; \|y - x\|).$$

Distância entre vectores

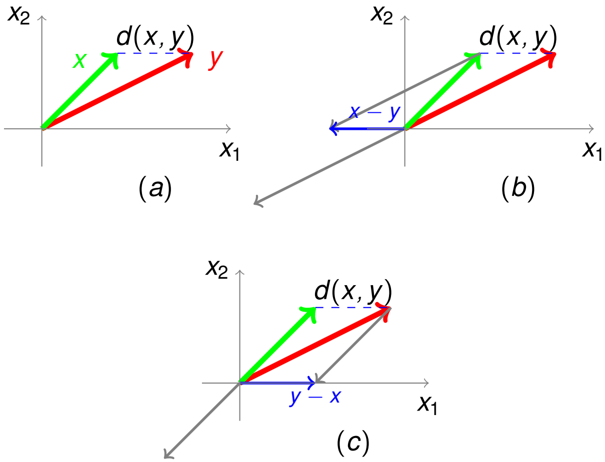


(a)

Distância entre vectores



Distância entre vectores



Produto interno

Produto interno de dois vectores

Sejam os vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

O *produto interno* de x e y é o número

$$x|y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x|y = y|x$

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x|y = y|x$

2. $x|(y+z) = x|y + x|z$

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x|y = y|x$

2. $x|(y+z) = x|y + x|z$

3. $\lambda(x|y) = (\lambda x)|y = x|(\lambda y)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x|y = y|x$
2. $x|(y+z) = x|y + x|z$
3. $\lambda(x|y) = (\lambda x)|y = x|(\lambda y)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $x|x = \|x\|^2$

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x|y = y|x$
2. $x|(y+z) = x|y + x|z$
3. $\lambda(x|y) = (\lambda x)|y = x|(\lambda y)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $x|x = \|x\|^2$
5. $x|x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

Propriedades do produto interno

Sejam x, y e z vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x|y = y|x$

2. $x|(y+z) = x|y + x|z$

3. $\lambda(x|y) = (\lambda x)|y = x|(\lambda y)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

4. $x|x = \|x\|^2$

5. $x|x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

6. $x|y = 0 \Leftrightarrow x$ e y são ortogonais (perpendiculares)

Propriedades do produto interno (concl.)

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1 x_2 + x_2(-x_1) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,

$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$

em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1x_2 + x_2(-x_1) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

Determine o ângulo entre $x = (1, -1, 0)$ e $y = (0, -1, 0)$

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1 x_2 + x_2(-x_1) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

Determine o ângulo entre $x = (1, -1, 0)$ e $y = (0, -1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} =$$

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1x_2 + x_2(-x_1) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

Determine o ângulo entre $x = (1, -1, 0)$ e $y = (0, -1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} =$$

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1 x_2 + x_2(-x_1) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

Determine o ângulo entre $x = (1, -1, 0)$ e $y = (0, -1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\|\cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1x_2 + x_2(-x_1) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

Determine o ângulo entre $x = (1, -1, 0)$ e $y = (0, -1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Propriedades do produto interno (concl.)

7. Se $x \neq \vec{0}$ e $y \neq \vec{0}$,
$$x|y = \|x\|\|y\| \cos\theta$$
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre x e y

Em $\mathbb{R}^2$, para obter um vector não nulo ortogonal a um dado vector não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1

$$(x_1, x_2)|(x_2, -x_1) = x_1x_2 + x_2(-x_1) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

Determine o ângulo entre $x = (1, -1, 0)$ e $y = (0, -1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \ (\theta \in [0, \pi])$$

TPC + Bons estudos!

- Exercícios 50 a 55 - uma alínea de cada exercício

- Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que u é unitário, v tem norma 2 e o cosseno do ângulo por eles formado tem valor $\frac{1}{4}$. Mostre que $3u - v$ e $u + v$ são ortogonais.