Matemática I

25 Out 2021

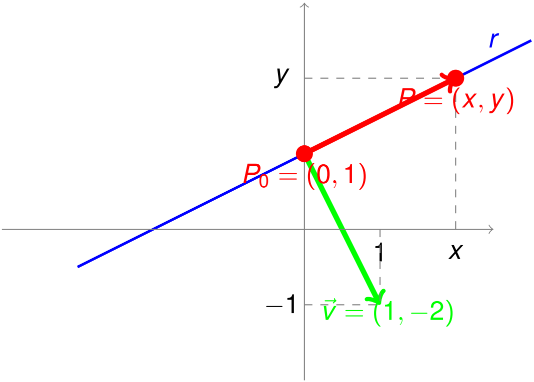
Isabel Martins

Resumo

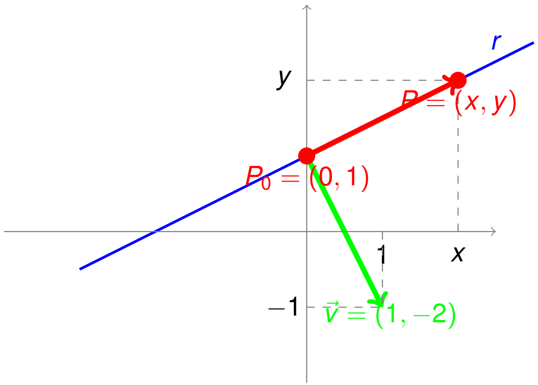
Fonte: Os Espacialistas

Equação geral de uma recta em $\mathbb{R}^2$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

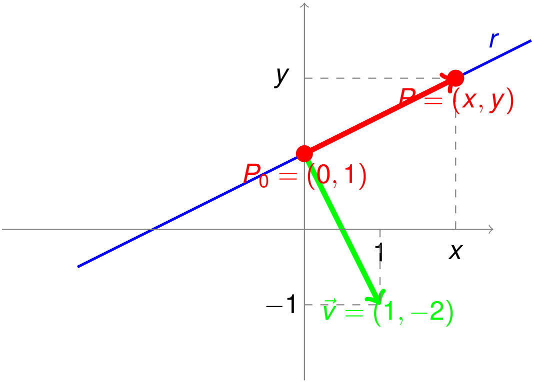


Rectas em $\mathbb{R}^2$



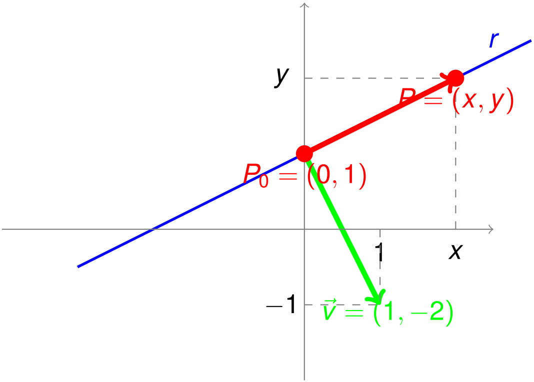
vector $\perp$ à recta r

Rectas em $\mathbb{R}^2$



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)$

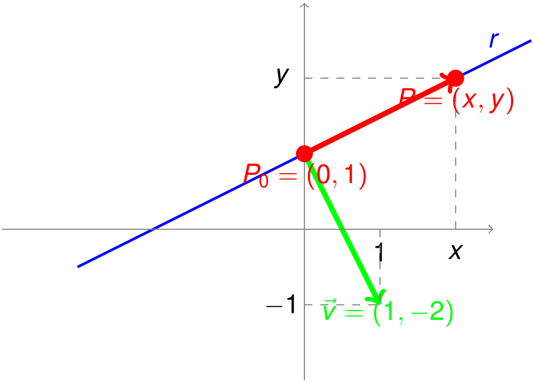
Rectas em $\mathbb{R}^2$



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

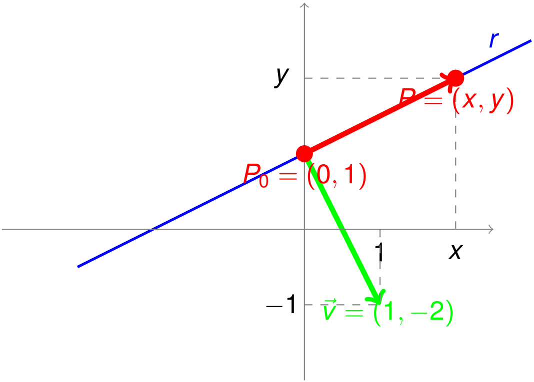


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 0, y - 1)|(1, -2) = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

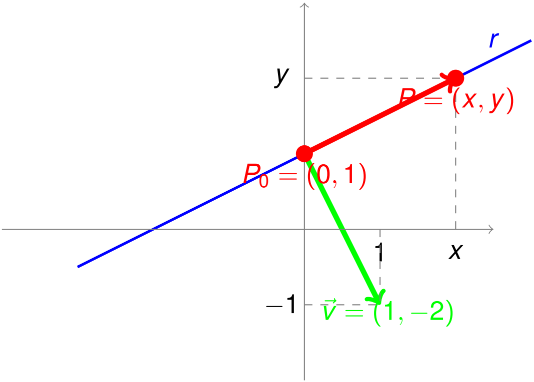


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 0, y - 1) | (1, -2) = 0 \Leftrightarrow 1x - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

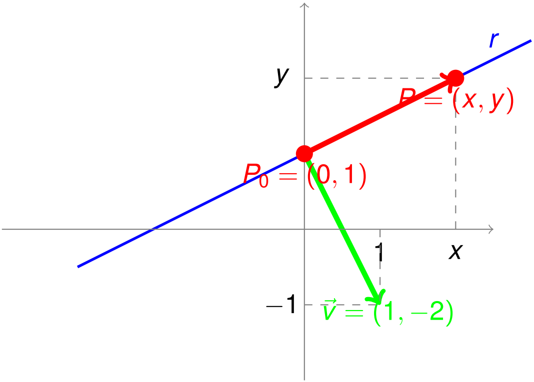


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\overrightarrow{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 0, y - 1)|(1, -2) = 0 \Leftrightarrow 1x - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 1x - 2y = -2$

Rectas em $\mathbb{R}^2$



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)$

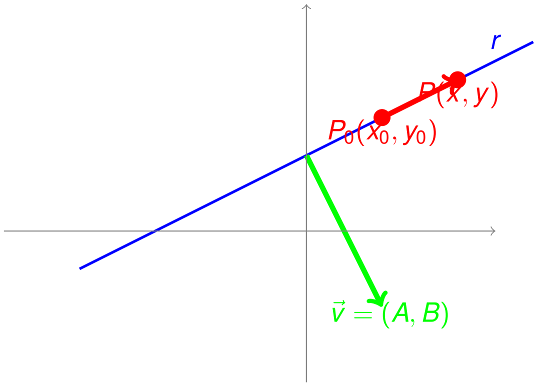
Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P}|\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 0, y - 1)|(1, -2) = 0 \Leftrightarrow 1x - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 1x - 2y = -2$

A recta r é $\perp$ ao vector (1,-2) e passa no ponto (0,1)

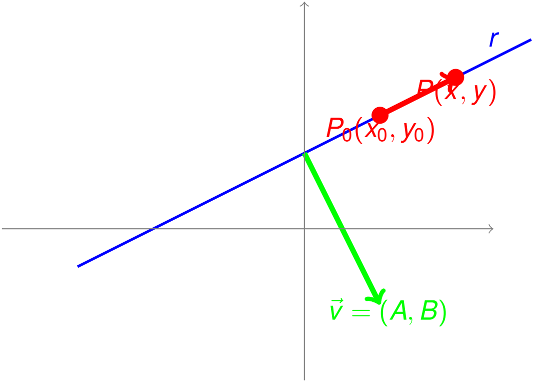
Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,



Rectas em $\mathbb{R}^2$

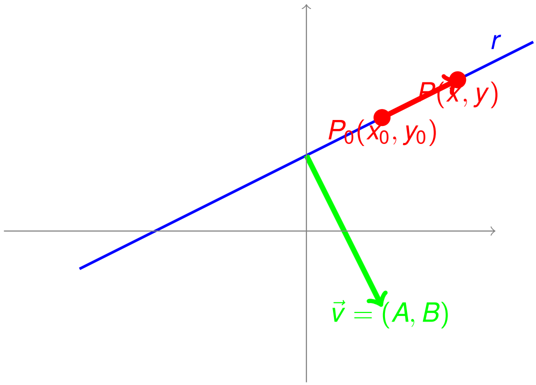
Genericamente,



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

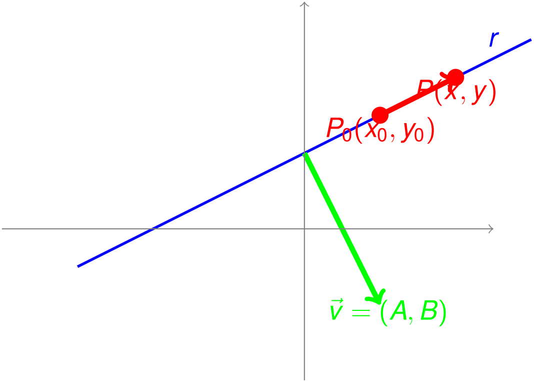


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

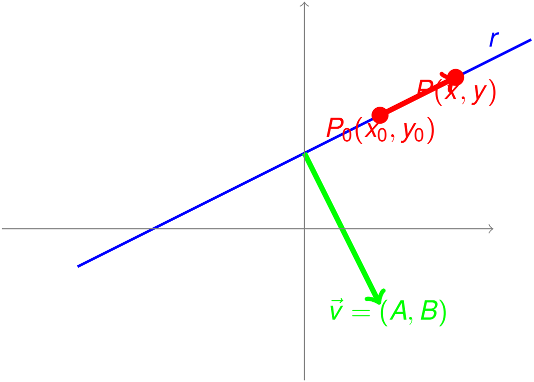


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) | (A, B) = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,



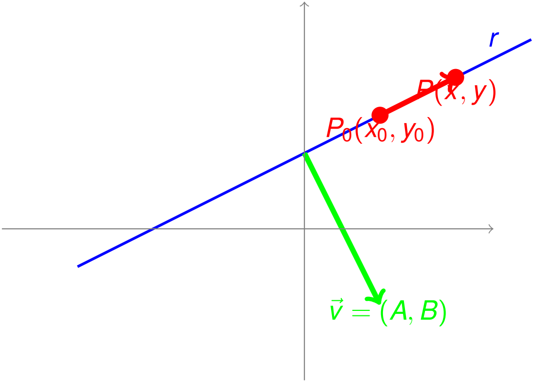
vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) | (A, B) = 0 \Leftrightarrow$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

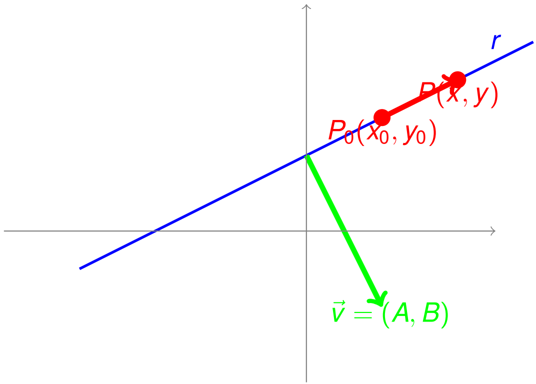


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)|(A, B) = 0 \Leftrightarrow$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C} \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

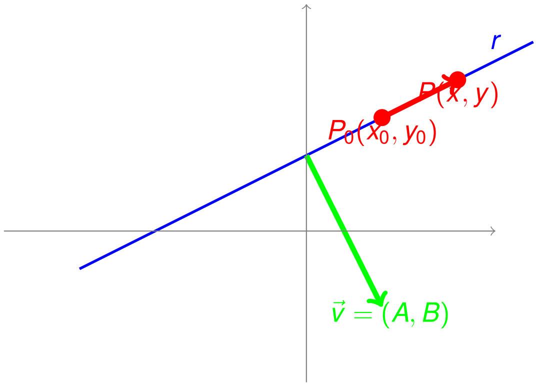


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P}|\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)|(A, B) = 0 \Leftrightarrow$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C} \Leftrightarrow Ax + By = C$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P}|\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)|(A, B) = 0 \Leftrightarrow$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C} \Leftrightarrow Ax + By = C$$

A recta r é $\perp$ ao vector (A, B) e passa no ponto (x_0, y_0)

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação geral de uma recta em $\mathbb{R}^2$

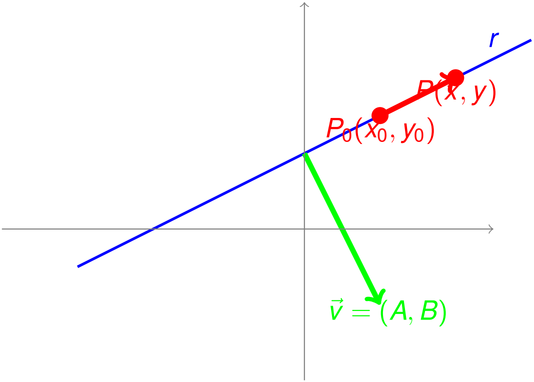
- Recta $\perp$ ao vector $\vec{v} = (A, B)$ e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$Ax + By = C \text{ tal que } Ax_0 + By_0 = C \quad (P_0 \text{ é solução da equação}).$$

Equação declive-ponto e equação declive-ordenada na origem de uma recta não vertical em $\mathbb{R}^2$

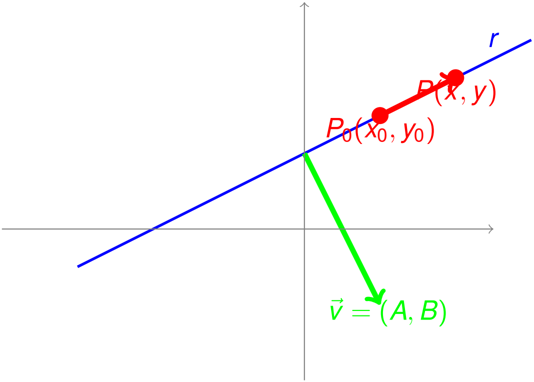
Rectas em $\mathbb{R}^2$

Rectas não verticais



Rectas em $\mathbb{R}^2$

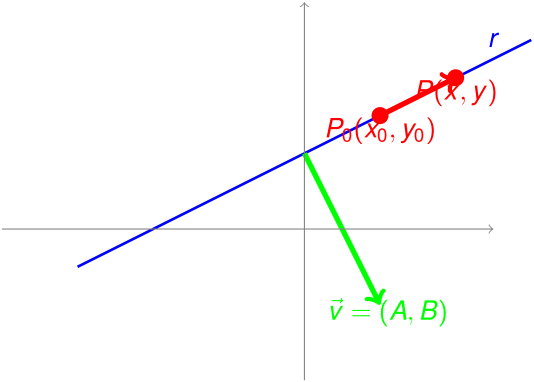
Rectas não verticais



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

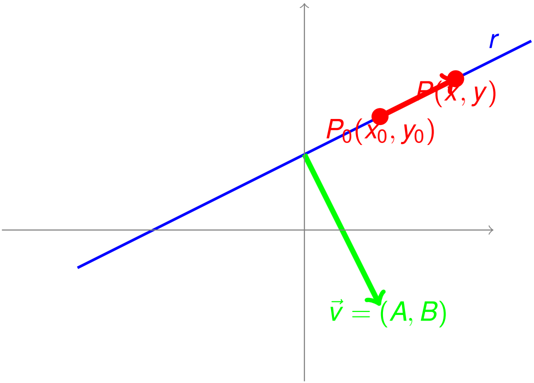
Rectas não verticais



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0)$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

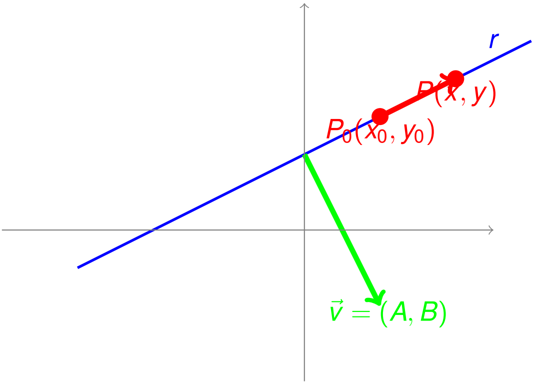
Rectas não verticais



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{B \neq 0} y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Rectas não verticais

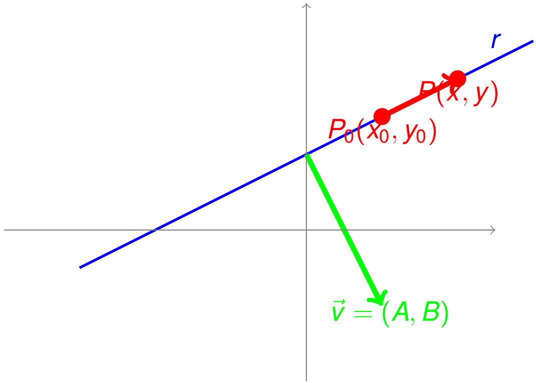


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{B \neq 0} y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = y_0 - \frac{A}{B}(x - x_0)$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Rectas não verticais



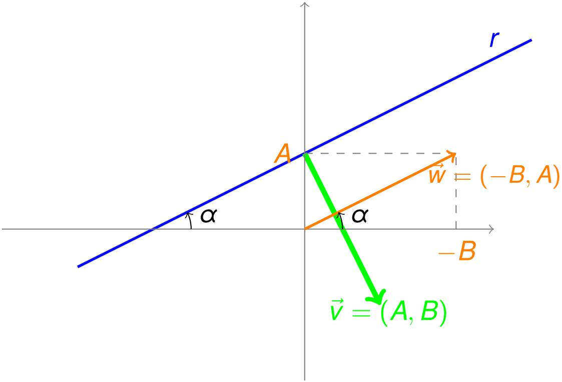
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{B \neq 0} y - y_0 = -\tfrac{A}{B}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = y_0 - \frac{A}{B}(x - x_0)$$

O que é $-\dfrac{A}{B}$?

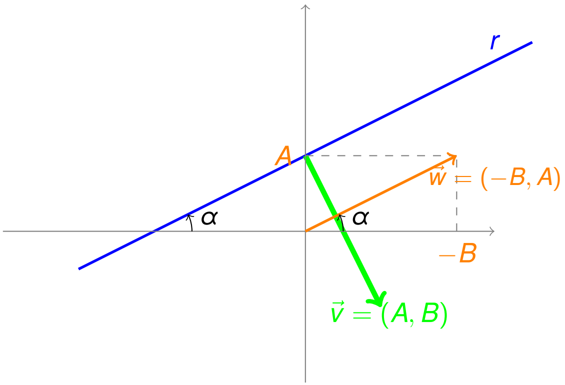
Rectas em $\mathbb{R}^2$

O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Rectas em $\mathbb{R}^2$

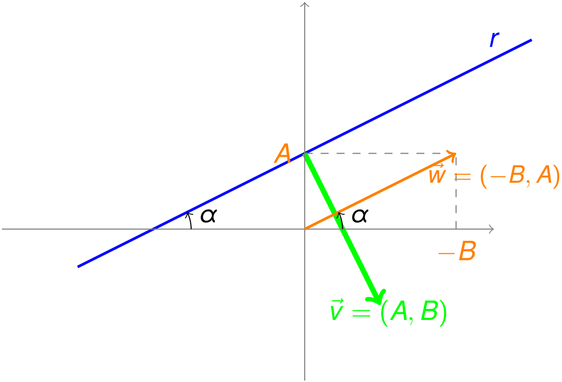
O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Declive da recta - $\tan \alpha$ (**α é o menor ângulo positivo que a recta faz com o eixo das abcissas)**

Rectas em $\mathbb{R}^2$

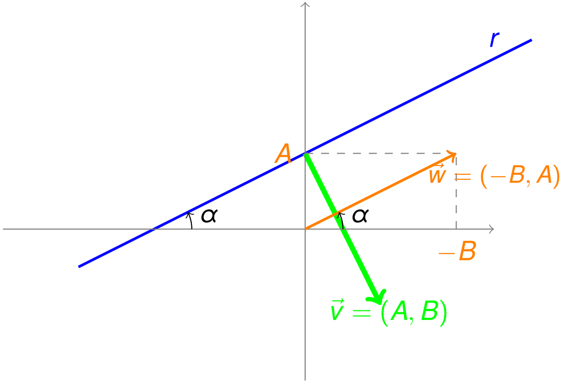
O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Declive da recta - $\tan\alpha$ **(**α **é o menor ângulo positivo que a recta faz com o eixo das abcissas)** $\tan\alpha = \dfrac{A}{-B} =$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Declive da recta - $\tan\alpha$ **(**α **é o menor ângulo positivo que a recta faz com o eixo das abcissas)** $\tan\alpha = \dfrac{A}{-B} = -\dfrac{A}{B}$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow y = mx + \underbrace{y_0 - mx_0}_{b} \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow y = mx + \underbrace{y_0 - mx_0}_{b} \Leftrightarrow$$

$$y = mx + b$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow y = mx + \underbrace{y_0 - mx_0}_{b} \Leftrightarrow$$

$$y = mx + b$$

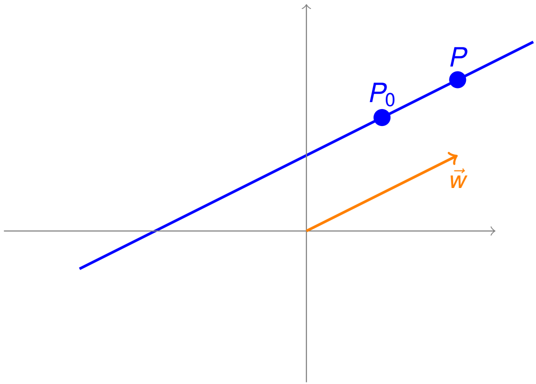
Equação declive-ordenada na origem de uma recta não vertical

- Recta com declive m e ordenada na origem b

$$y = mx + b \text{ (Equação reduzida).}$$

Equação vectorial de uma recta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Rectas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

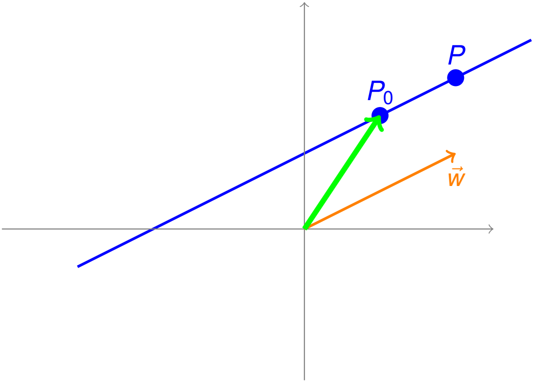


Equação vectorial de uma recta em R^2 e $\mathbb{R}^3$

Recta com a direcção do vector $\vec{w} \neq \vec{0}$ e passa no ponto P_0 é

$$P = P_0 + k\vec{w}, \text{ qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

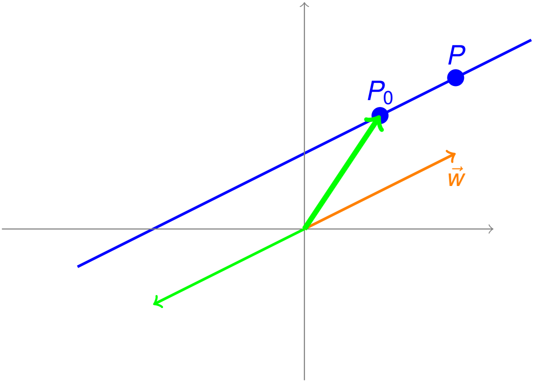


Equação vectorial de uma recta em R^2 e $\mathbb{R}^3$

Recta com a direcção do vector $\vec{w} \neq \vec{0}$ e passa no ponto P_0 é

$$P = P_0 + k\vec{w}, \text{ qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

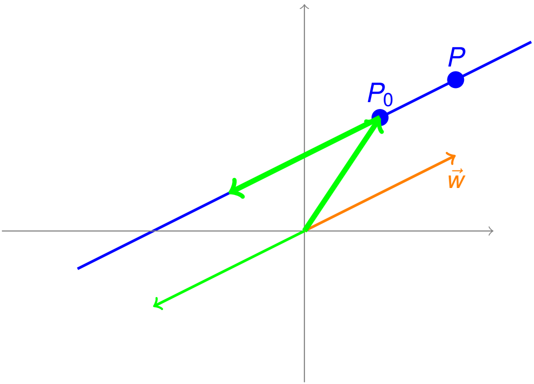


Equação vectorial de uma recta em R^2 e $\mathbb{R}^3$

Recta com a direcção do vector $\vec{w} \neq \vec{0}$ e passa no ponto P_0 é

$$P = P_0 + k\vec{w}, \text{ qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

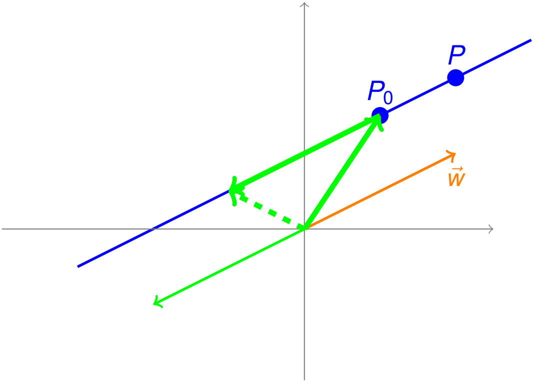


Equação vectorial de uma recta em R^2 e $\mathbb{R}^3$

Recta com a direcção do vector $\vec{w} \neq \vec{0}$ e passa no ponto P_0 é

$$P = P_0 + k\vec{w}, \text{ qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

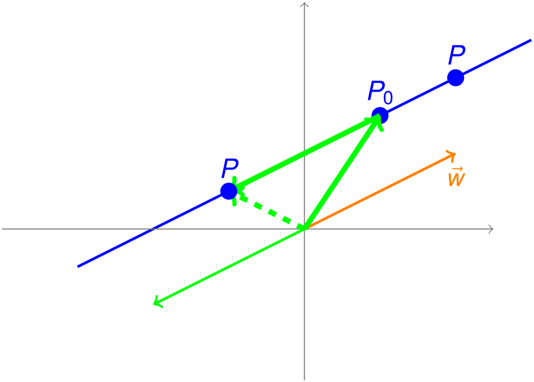


Equação vectorial de uma recta em R^2 e $\mathbb{R}^3$

Recta com a direcção do vector $\vec{w} \neq \vec{0}$ e passa no ponto P_0 é

$$P = P_0 + k\vec{w}, \text{ qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$



Equação vectorial de uma recta em R^2 e $\mathbb{R}^3$

Recta com a direcção do vector $\vec{w} \neq \vec{0}$ e passa no ponto P_0 é

$$P = P_0 + k\vec{w}, \text{ qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

Mais Exercícios

Exercícios

1. Sejam os pontos $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ e a recta r que contém o ponto $(3, 3, 3)$ e é paralela ao vector $\vec{BC}$.
   a) Escreva a equação vectorial da recta r.
   b) Descreva a recta r como um sistema de equações lineares.
   c) Averigue se o ponto $(1, 2, 3)$ pertence à recta r.

2. Sejam os pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (-2, 3.0)$ e a recta AB.
   a) Escreva a equação vectorial da recta AB.
   b) Descreva a recta AB como um sistema de equações lineares.
   c) Obtenha os pontos da recta AB que distam $2\sqrt{19}$ de A.

3. Sejam os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 0.1)$ e a recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(1, 1, 1)$.
   a) Descreva a recta r como um sistema de equações lineares.
   b) Determine os pontos da recta r equidistantes de A e B.

Exercícios

4. Seja a recta $r: \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$. Escreva a equação vectorial da recta r.
5. Verifique se as rectas $(x,y,z)=(1,2,3)+k(1,2,1)$, com $k\in\mathbb{R}$, e $(x,y,z)=(2,4,4)+k(-1,1,-1)$, com $k\in\mathbb{R}$, são ortogonais.
6. Escreva a equação vectorial da recta que contém o ponto $P=(2,6,1)$ e é ortogonal à recta $r:(x,y,z)=(-3,0,0)+k(1,1,3)$, com $k\in\mathbb{R}$.
7. Calcule a distância do vector $\vec{OP}$ à recta r:
   a) $\vec{OP}=(0,-1,0)$ e $r:(x,y,z)=(0,0,0)+k(3,2,1)$, com $k\in\mathbb{R}$
   b) $\vec{OP}=(1,0,1)$ e $r: \begin{cases} x=2y \\ z=\frac{2}{3}y \end{cases}$.

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Elementos necessários para definir uma recta em $\mathbb{R}^2$

- Um ponto da recta + um vector paralelo à recta $\longrightarrow$ Eq. vectorial
- Dois pontos da recta $\longrightarrow$ Eq. vectorial
- Um ponto da recta + um vector $\perp$ à recta $\longrightarrow$ Eq. geral
- Um ponto da recta + o declive da recta $\longrightarrow$ Eq. declive-ponto da recta
- Um ponto da recta + ordenada na origem $\longrightarrow$ Eq. declive-ordenada na origem (eq. reduzida).

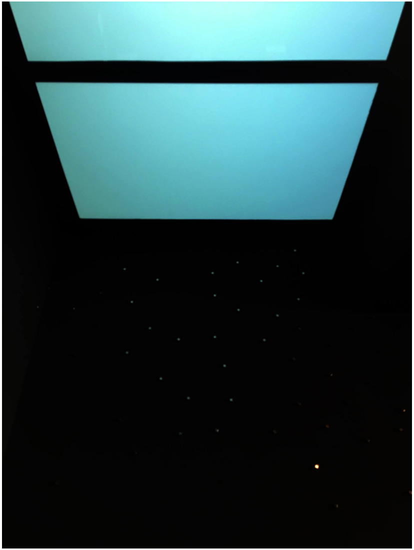
Rectas em $\mathbb{R}^3$

Elementos necessários para definir uma recta em $\mathbb{R}^3$

- Um ponto da recta + um vector paralelo à recta $\longrightarrow$ Eq. vectorial

- Dois pontos da recta $\longrightarrow$ Eq. vectorial

- Dois planos de $\mathbb{R}^3$ concorrentes $\longrightarrow$ Eq. vectorial



Fonte: Os Espacialistas

Equação geral de um plano em $\mathbb{R}^3$

Planos em $\mathbb{R}^3$

Equação geral de um plano em $\mathbb{R}^3$

- Plano $\perp$ ao vector $\vec{v} = (A, B, C)$ e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$Ax + By + Cz = D \text{ tal que } Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$$

(P_0 é solução da equação).

Equação vectorial de um plano em $\mathbb{R}^3$

Planos em $\mathbb{R}^3$

Equação vectorial de um plano em $\mathbb{R}^3$

Plano com as direcções dos vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, em que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e não colineares, e passa no ponto P_0

$$P = P_0 + k\vec{v} + l\vec{w}, \text{ qualquer } k, l \in \mathbb{R}.$$

Planos em $\mathbb{R}^3$

Elementos necessários para definir um plano em $\mathbb{R}^3$

- Um ponto do plano + dois vectores paralelos ao plano e não colineares $\longrightarrow$ Eq. vectorial

- Três pontos do plano não colineares $\longrightarrow$ Eq. vectorial

- Um ponto do plano + um vector $\perp$ ao plano $\longrightarrow$ Eq. geral

Colinearidade

$\vec{v}$ colinear com $\vec{u} \neq \vec{0}$

Sejam os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} \neq \vec{0}$. $\vec{v}$ é colinear com $\vec{u}$ se

$$\text{existir um } k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{u}.$$

Três pontos colineares

Três pontos A, B e C são colineares se

existir uma recta que os contenha, ou seja, a recta que passa por A e tem a direcção do vector $\vec{AB}$ contém C.

Mais Exercícios :)