Matemática I - 2022/23

Aula 19 Set

Isabel Martins

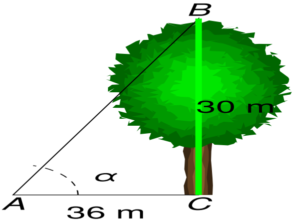
Sinopse

Motivação

Problema 1

Problema 1

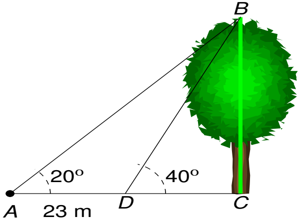
Uma árvore de 30 m de altura ($\overline{BC}$) projeta uma sombra de 36 m de comprimento ($\overline{AC}$). Determine o ângulo de elevação do sol (α).



Problema 2

Problema 2

Determine a altura de uma árvore ($\overline{CB}$) se o ângulo de elevação do seu topo varia de 20º para 40º quando um observador, na posição A, avança 23 m até D.



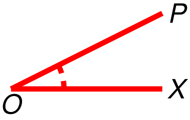
Ângulos e comprimentos de arcos

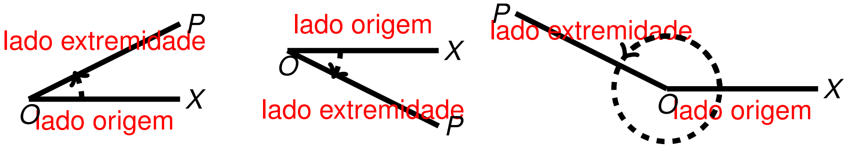
Trigonometria

Trigonometria

Área da Matemática encarregada de estudar as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos.

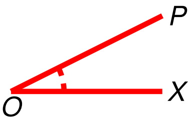
Ângulo *XOP*

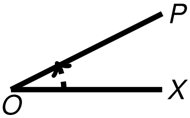




O ponto O, ponto de intersecção dos lados de XOP, é o vértice do ângulo

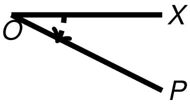
Ângulo XOP

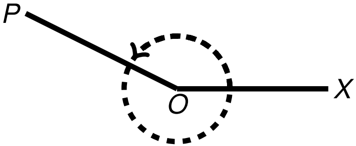




ângulo positivo

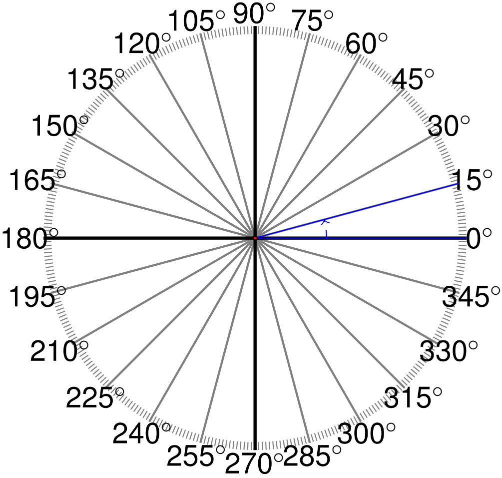
ângulo negativo





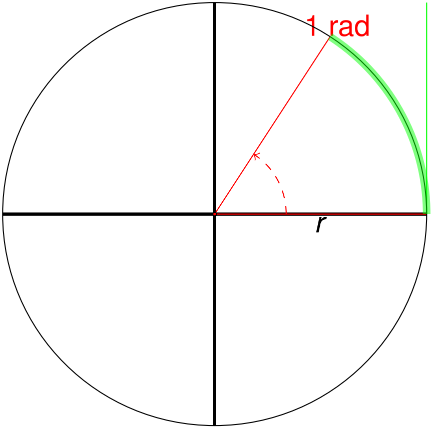
ângulo positivo

Medidas de ângulos - grau



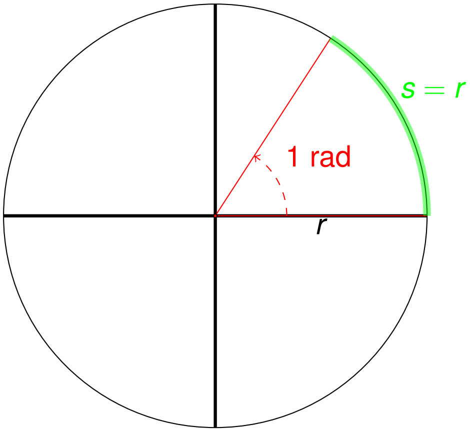
1^o é a medida do ângulo ao centro, positivo, em que o arco da circunferência formado pelos seus lados é 1/360 da circunferência dividida em 360 partes iguais.

Medidas de ângulos - radiano



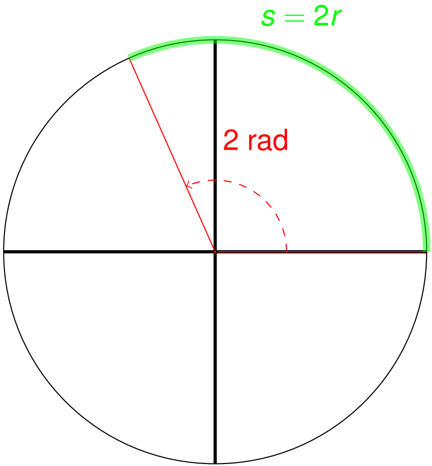
1 radiano é a medida do ângulo ao centro, positivo, em que o arco da circunferência formado pelos seus lados tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência.

Comprimentos de arcos



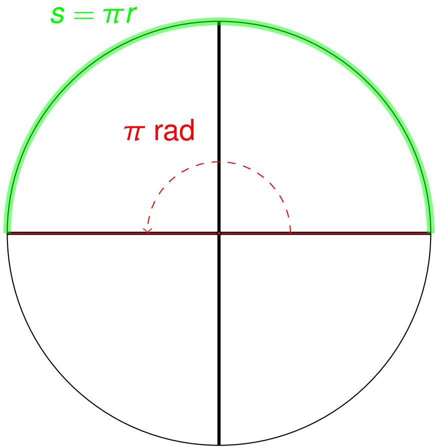
Comprimento do arco a verde, s, é $s = r$

Comprimentos de arcos



Comprimento do arco a verde, s, é $s = 2r$

Comprimentos de arcos



Comprimento do arco a verde, s, é $s = \pi r$

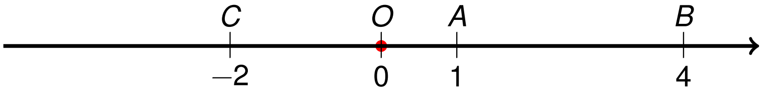
Comprimentos de arcos

Comprimento do arco de uma circunferência de raio r interceptado pelo ângulo ao centro, positivo, de amplitude θ radianos é

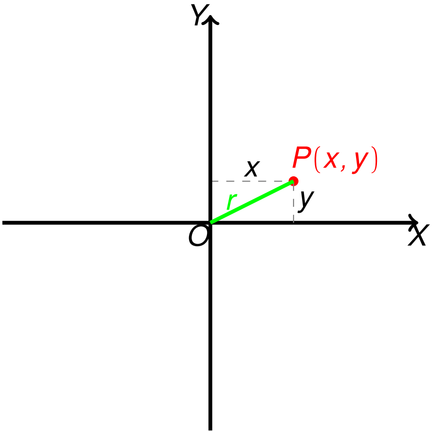
$$s = \theta\, r.$$

Razões trigonométricas

Escala numérica

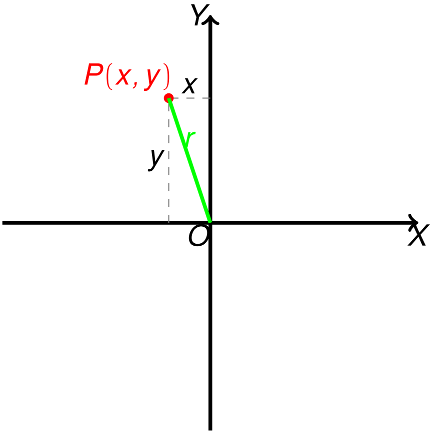


Sistema de coordenadas rectangulares



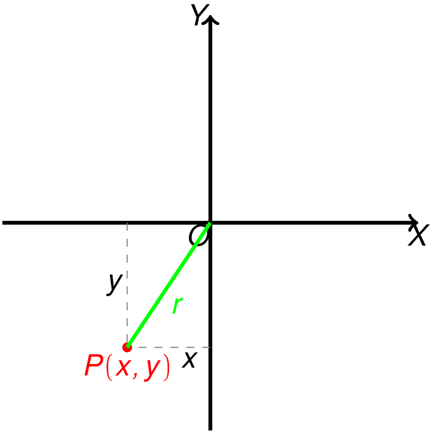
x - abcissa de P - distância directa do eixo dos YY a P
y - ordenada de P- distância directa do eixo dos XX a P
r - distância indirecta da origem O a P [distância de P] $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Sistema de coordenadas rectangulares



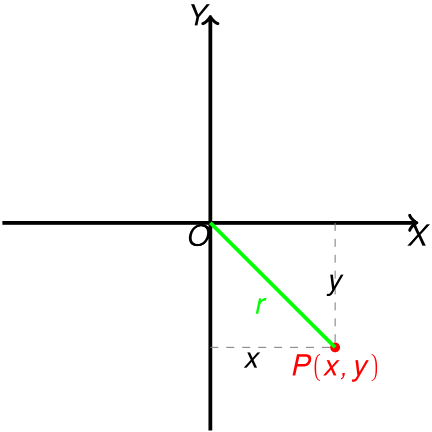
x - abcissa de P - distância directa do eixo dos YY a P
y - ordenada de P - distância directa do eixo dos XX a P
r - distância indirecta da origem O a P [distância de P] $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Sistema de coordenadas rectangulares



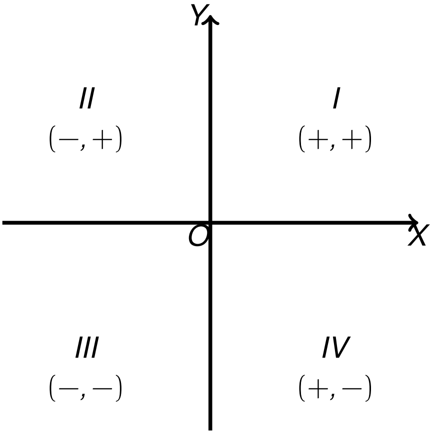
x - abcissa de P - distância directa do eixo dos YY a P
y - ordenada de P - distância directa do eixo dos XX a P
r - distância indirecta da origem O a P [distância de P] $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Sistema de coordenadas rectangulares

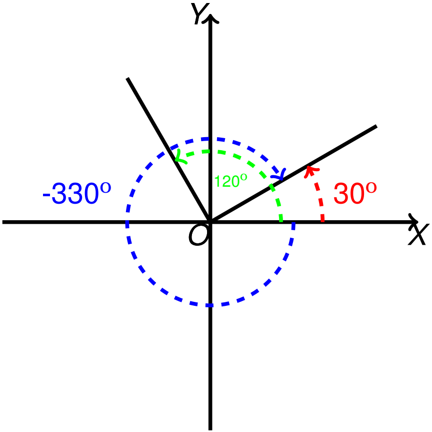


x - abcissa de P - distância directa do eixo dos YY a P
y - ordenada de P - distância directa do eixo dos XX a P
r - distância indirecta da origem O a P [distância de P] $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Sistema de coordenadas rectangulares

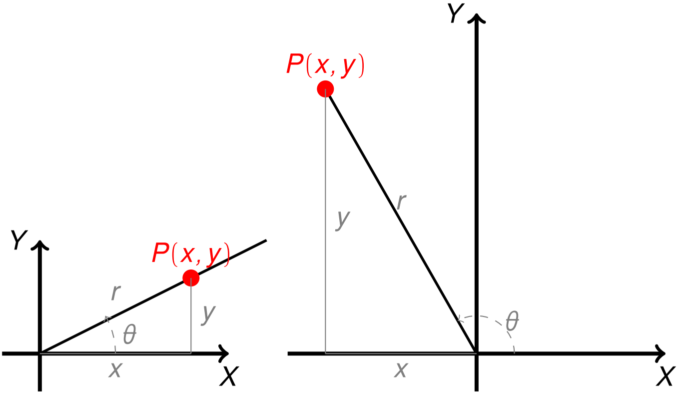


Ângulos em posição padrão

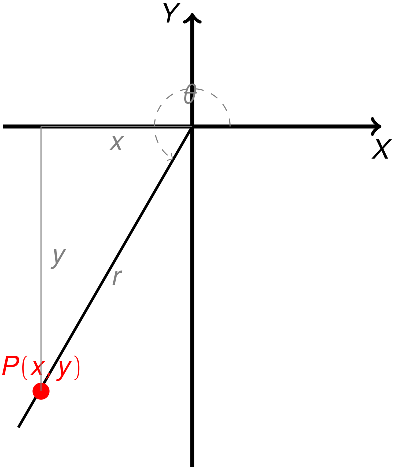


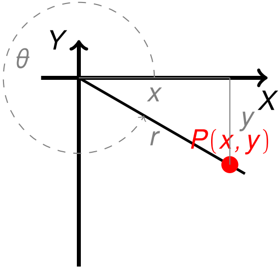
Ângulos coterminais - ângulos que, na posição padrão, partilham os lados inicial e terminal. Ex: 30º e -330º
Ângulos quadrantais - 0º, 90º, 180º, 270º e os ângulos coterminais com eles.

Razões trigonométricas



Razões trigonométricas





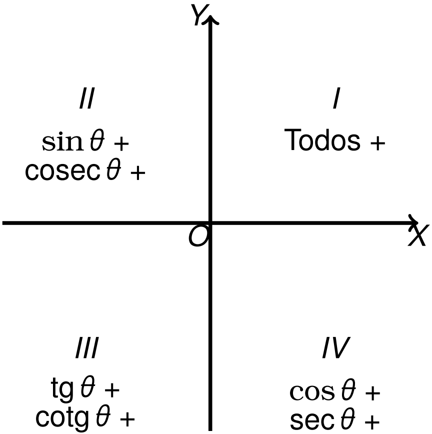
Razões trigonométricas

Razões trigonométricas

- $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
- $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ quando $x \neq 0$ (ou $\cos\theta \neq 0$)
- $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{x}{y}$ quando $y \neq 0$

  $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ quando $\operatorname{tg}\theta$ está definida e é $\neq 0$
- $\sec\theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ quando $x \neq 0$ (ou $\cos\theta \neq 0$)
- $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ quando $y \neq 0$ (ou $\sin\theta \neq 0$)

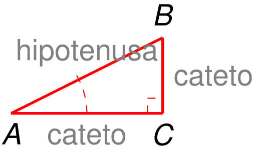
Sinais das razões trigonométricas



Razões trigonométricas de ângulos quadrantais

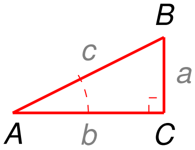
Ângulo θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	tg θ	cotg θ	sec θ	cosec θ
0^{o} (0 rad)	0	1	0	ND	1	ND
90^{o} ($\frac{\pi}{2}$ rad)	1	0	ND	0	ND	1
180^{o} (π rad)	0	-1	0	ND	-1	ND
270^{o} ($\frac{3}{2}\pi$ rad)	-1	0	ND	0	ND	-1

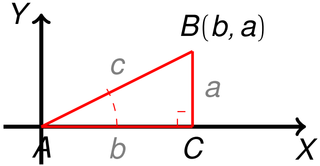
Triãngulo rectângulo



- Tem um ângulo de 90º ($\widehat{C}$)
- $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são ângulos complementares (como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ}$, $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^{\circ}$)
- Relativamente a $\widehat{A}$: AC é o cateto adjacente e BC é o cateto oposto
- Relativamente a $\widehat{B}$: BC é o cateto adjacente e AC é o cateto oposto

Razões trigonométricas de ângulos agudos



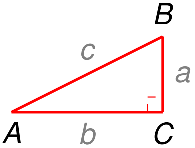


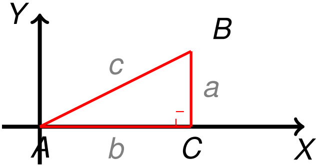
$$\sin \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{\overline{\text{cateto oposto}}}{\overline{\text{hipotenusa}}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{\overline{\text{cateto adjacente}}}{\overline{\text{hipotenusa}}}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{\overline{\text{cateto oposto}}}{\overline{\text{cateto adjacente}}}$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos





$$\sin \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \sin \hat{A}$$

$$\text{tg}\, \hat{B} == \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{a} = \text{cotg}\, \hat{A}$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos

Ângulo θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	tg θ
30^{o} ($\frac{\pi}{6}$ rad)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^{o} ($\frac{\pi}{4}$ rad)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^{o} ($\frac{\pi}{3}$ rad)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Dado dois ângulos coterminais α e β, tem-se

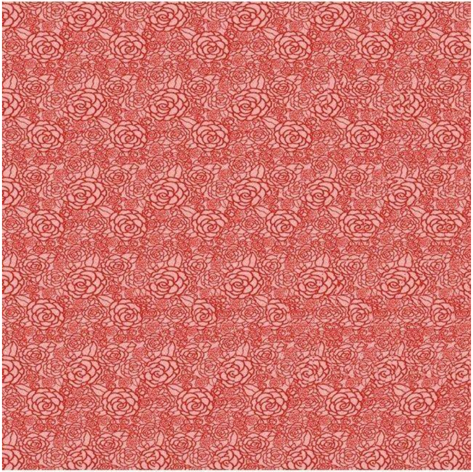
- $sin\, \alpha = \sin \beta$
- $\cos \alpha = \cos \beta$
- cada uma das restantes razões trigonométricas, ou tem o mesmo valor nos dois ângulos, ou não está definida nos dois ângulos.

TPC + Bons estudos!

- Refazer o Problema 1 e o Problema 2 da Aula 19 Set 2022

- Exercícios Aula 19 Set 2022

What animal is hidden in this 3D picture?



© BRIGHTSIDE