INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

26 de janeiro de 2022 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrônicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

[11v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 4\alpha & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 2\beta \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- b) Indique os valores de α para os quais:
 - i) $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$
 - ii) $(1, -1, 1) \in \mathcal{N}(A)$.
 - iii) $(1, 2, 1)$ é vetor próprio de A .

No que se segue considere $\alpha = 1$.
- c) Defina analítica e geometricamente $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
- d) Considere $\beta = 1$ e escreva b como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .
- e) Justifique que $\{(1, 0, 2), (2, 10, -1)\}$ é base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.
- f) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- g) Determine uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

[4.5v] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ e $b = (0, 3, 2, -2)$.

- a) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)^\perp$
- b) Calcule $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$, $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(b)$ e indique a distância de b a $\mathcal{C}(A)$.
- c) Indique um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ tal que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = u_1$ e $d(c, \mathcal{C}(A)) = 1$.

Continua no verso !

- [1v] **3.** Um lagar de azeite produz quatro tipos de azeite, T_1 , T_2 , T_3 e T_4 . O processo de produção inclui três etapas, prensagem, refinação e embalagem, com 650, 700 e 700 horas-máquina (h-m) disponíveis por mês, respetivamente. O lagar comprometeu-se a fornecer 10000 litros de azeite T_3 a um cliente. A tabela seguinte indica as necessidades em horas-máquina e o lucro obtido na produção de 100 litros de cada tipo de azeite.

Etapas de produção	Necessidades em h-m/100 l			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Prensagem	1	1.5	0.75	1.25
Refinação	2	1.5	2.5	1.5
Embalamento	1.5	1.25	1.25	1.5
Lucro (€/100 l)	40	32	35	36

Pretende-se determinar o plano mensal de produção que maximiza o lucro.

Formule o problema em termos de programação linear, atribuindo significado às variáveis.

- [1.5v] **4.** Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- a) Converta à forma *standard* a formulação anterior.
 b) Mostre que $w = (2, 0, 1)$ é vértice da região admissível.

- [2v] **5.** a) Defina complemento ortogonal de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$.
 b) Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Prove que se $\{u, v, w\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores, então $\{u, u + v, u + v + w\}$ é também linearmente independente.