INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

4 de julho de 2022 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

[7v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -\alpha & 2\alpha+1 & 1 \\ 2-\alpha & -3 & 3 \end{bmatrix} = [\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) A matriz A é invertível.

ii) $(1, 1, 1)$ é solução de $Ax = b$.

iii) b é combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

iv) $\mathcal{C}(A)^\perp$ define uma reta em $\mathbb{R}^3$.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 0$.

c) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analítica e geometricamente.

d) Mostre que $\{(2, 1, 5), (0, 1, 1)\}$ é base de $\mathcal{C}(A)$.

[3.5v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $\det((A - I_3)^{100})$

b) Calcule os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

c) Indique dois vetores próprios de A linearmente independentes.

d) Será que A é diagonalizável?

[4.5v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,]$, $b = (1, 2, 3, 4)$ e $u = (1, -1, 0, 1)$.

a) Mostre que $\alpha\, u \perp \mathcal{C}(A)$ para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Determine uma base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.

c) Determine as projeções ortogonais de b sobre $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{C}(A)^\perp$.

d) Determine os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para os quais $\|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 - b\|$ atinge o menor valor possível e indique esse valor.

Continua no verso !

[3v] **4.** Para alimentar vacas leiteiras, um criador dispõe de feno, silagem de milho e um concentrado composto. Os dados relativos às características e custos de cada tipo de alimento são as seguintes:

	Matéria seca (%)	Energia (Kcal/Kg)	Proteínas (%)	Custo (€/Kg)
Feno	80	1500	2.5	0.5
Silagem	25	500	2.0	0.9
Concentrado	90	2500	20	1.0

Sabe-se que diariamente cada vaca necessita de pelo menos 36000 Kcal e 1.5 Kg de proteínas e que não pode ingerir mais do que 15 Kg de matéria seca. O criador pretende determinar as quantidades de cada tipo de alimento da ração diária de cada animal, de modo a obter o menor custo possível.

a) Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

b) Escreva o problema na forma *standard*.

c) Mostre que a ração constituída por 4 Kg de feno, 10 Kg de silagem e 10 Kg de concentrado composto corresponde a uma solução admissível do problema. Será vértice da região admissível?

[2v] **5.** a) Defina complemento ortogonal de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$.

b) Uma matriz quadrada A diz-se ortogonal, se $A^{-1} = A^T$. Prove que se A é ortogonal de ordem n, então $\|Ax\| = \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. (Sugestão: $\|u\|^2 = u^T u$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$.)