INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

17 de fevereiro de 2022 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

[10v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} = [\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

ii) $\langle v_1, v_2, v_3, b\rangle \neq \mathbb{R}^3$.

iii) b é vetor próprio de A e indique o correspondente valor próprio.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 1$.

c) Determine o ângulo entre v_1 e v_2.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

e) Escreva o vetor $(1, 2, 3)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

f) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

g) Indique os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébrica e geométrica.

[4.5v] **2.** Considere $V = \langle (1, 2, -3, -1), (0, 1, -1, 0), (1, 3, -4, -1)\rangle$ e $b = (2, 2, 0, 1)$.

a) Determine uma base e a dimensão de V.

b) Indique um vetor unitário ortogonal a V.

c) Determine o vetor de V mais próximo de b e indique o valor dessa distância.

d) Indique $c \in \mathbb{R}^4$ com $c \neq b$ tal que $\text{proj}_V(c) = \text{proj}_V(b)$ e $d(c, V) = d(b, V)$.

Continua no verso !

[2.5v] **3.** Uma empresa pretende fabricar três tipos de produtos, I, II e III em duas unidades fabris A e B, sendo que a unidade fabril B apenas pode fabricar produtos dos tipos I e II. As quantidades a fabricar de cada um dos tipos de produto, I, II e III não podem exceder as 60, 40 e 100 toneladas, respetivamente. A empresa assumiu os compromissos de fabricar pelo menos 20 toneladas de produto do tipo II e também que a quantidade de produto do tipo III produzida pela empresa deveria ser pelo menos 80% da produção total da unidade fabril A. As receitas da empresa por tonelada de produto dos tipos I, II e III, são respetivamente, 120, 130 e 95 €.

Pretende-se determinar a quantidade de produtos a fabricar em cada unidade fabril de modo a maximizar a receita.

a) Formule o problema em termos programação linear atribuindo significado às variáveis.

b) Converta a formulação anterior à forma *standard* atribuindo significado às variáveis de folga.

c) Justifique que produzir apenas:

25 toneladas de produto I e 100 toneladas de produto III na unidade fabril A e
35 toneladas de produto I e 40 toneladas de produto II na unidade fabril B,

corresponde a uma solução admissível do problema e indique as correspondentes restrições saturadas.

[1v] **4.** Considere o problema de programação linear na forma *standard*,

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
\max & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & f_1 & & & & & = & 10 \\
& 2x_1 & & & + & x_3 & & & + & f_2 & & & = & 110 \\
& & & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & - & f_3 & = & 80 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & f_1, & & f_2, & & f_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Justifique que $(40, 0, 30, 0, 0, 10)$ corresponde a uma solução básica admissível do problema na forma *standard*.

[2v] **5.** a) Defina subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

b) Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Prove que para qualquer $b \in \mathbb{R}^3$ se tem,

$$b = \frac{b \cdot u}{u \cdot u}u + \frac{b \cdot v}{v \cdot v}v + \frac{b \cdot w}{w \cdot w}w.$$