

2º Teste de 2019/20 (1h30m)

(3.5v) 1. Considere $V = \langle (-1,1,1,0), (1,-2,0,1), (1,-4,2,3) \rangle$, $b = (-1,0,-1,1)$ e $c = (2,-4,3,2)$.

a) Verifique que b é ortogonal a V .

$$\begin{aligned} (-1,0,-1,1) \cdot (-1,1,1,0) &= 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ (-1,0,-1,1) \cdot (1,-2,0,1) &= -1 + 0 + 0 + 1 = 0 \\ (-1,0,-1,1) \cdot (1,-4,2,3) &= -1 + 0 - 2 + 3 = 0 \end{aligned}$$

b é ortogonal a todos os vetores de um conjunto gerador de V , logo b é ortogonal a V

b) Indique uma base ortogonal para V .

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na matriz em escada, as colunas com pivot, neste caso as 1ª e 2ª colunas, correspondem a colunas da matriz inicial que constituem uma base para V : $\{(-1,1,1,0), (1,-2,0,1)\}$ mas esta base não é ortogonal. Sejam $u_1 = (-1,1,1,0)$ e $u_2 = (1,-2,0,1)$ – os vetores da base não ortogonal identificada para V

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja $v_1 = (-1,1,1,0)$

$$\begin{aligned} \text{então } v_2 &= u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 = (1,-2,0,1) - \frac{(-1,1,1,0) \cdot (1,-2,0,1)}{(-1,1,1,0) \cdot (-1,1,1,0)} (-1,1,1,0) = \\ &= (1,-2,0,1) - (-1)(-1,1,1,0) = (1,-2,0,1) + (-1,1,1,0) = (0,-1,1,1) \end{aligned}$$

Assim, uma base ortogonal para V : $\{(-1,1,1,0), (0,-1,1,1)\}$

c) Calcule as projecções ortogonais do vetor c sobre V e $V^\perp$ e indique a distância de c a $V^\perp$.

Atendendo a que por b), $\{(-1,1,1,0), (0,-1,1,1)\}$ é uma base ortogonal de V ,

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(c) &= \text{proj}_{(-1,1,1,0)}(c) + \text{proj}_{(0,-1,1,1)}(c) = \\ &= \frac{(-1,1,1,0) \cdot (2,-4,3,2)}{(-1,1,1,0) \cdot (-1,1,1,0)} (-1,1,1,0) + \frac{(0,-1,1,1) \cdot (2,-4,3,2)}{(0,-1,1,1) \cdot (0,-1,1,1)} (0,-1,1,1) = \\ &= -(-1,1,1,0) + 3(0,-1,1,1) = (1,-1,-1,0) + (0,-3,3,3) = (1,-4,2,3) \\ \text{proj}_{V^\perp}(c) &= c - \text{proj}_V(c) = (2,-4,3,2) - (1,-4,2,3) = (1,0,1,-1) \\ \text{dist}(c, V^\perp) &= \|\text{proj}_V(c)\| = \|(1,-4,2,3)\| = \sqrt{1+16+4+9} = \sqrt{30} \end{aligned}$$

d) Determine, justificando, uma matriz B tal que $Bx \in V$ e $x - Bx \in V^\perp$ para todo o $x \in \mathbb{R}^4$.

$Bx \in V \wedge x - Bx \in V^\perp, \forall x \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow Bx = \text{proj}_V(x), \forall x \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow B$ é a matriz de projecção sobre V

Se $V = \mathcal{C}(A)$ e as colunas de A constituem uma base para V , $B = A(A^T A)^{-1} A^T$

Por b), uma base ortogonal de V : $\{(-1,1,1,0), (0,-1,1,1)\}$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = A(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1v) 2. Seja U um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Mostre que se a e b são vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $\text{proj}_U(a) = \text{proj}_U(b)$ então $a - b$ é ortogonal a U .

$$\begin{aligned} a - b &= \text{proj}_U(a) + \text{proj}_{U^\perp}(a) - [\text{proj}_U(b) + \text{proj}_{U^\perp}(b)] = \\ &= \text{proj}_U(a) - \text{proj}_U(b) + \text{proj}_{U^\perp}(a) - \text{proj}_{U^\perp}(b) = \text{proj}_{U^\perp}(a) - \text{proj}_{U^\perp}(b) \\ \text{proj}_{U^\perp}(a) - \text{proj}_{U^\perp}(b) &\text{ pertence a } U^\perp, \text{ isto é } a - b (= \text{proj}_{U^\perp}(a) - \text{proj}_{U^\perp}(b)) \text{ pertence a } U^\perp, \text{ porque } \\ &\text{proj}_{U^\perp}(a) \text{ e } \text{proj}_{U^\perp}(b) \text{ pertencem ambos a } U^\perp \text{ que é um subespaço vetorial, logo fechado para as } \\ &\text{operações adição e produto por escalares. Logo, } a - b \text{ é ortogonal a } U. \end{aligned}$$

- (2.5v) 3. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Mostre que $(3,0,1)$ é vetor próprio de A para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e indique o correspondente valor próprio.

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3\lambda \\ 0 = 0 \\ \alpha = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \lambda \\ 0 = 0 \\ \alpha = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \alpha$$

Logo $(3,0,1)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio α

No que se segue considere $\alpha = 4$.

- b) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

Utilizando a regra de Sarrus, obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - [0 - 3(4-\lambda) + 2(4-\lambda)] = \\ &= (4-\lambda)^2(2-\lambda) - [-(-4-\lambda)] = (4-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda) + 1] = (4-\lambda)(8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2+1) = \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9) = (4-\lambda)(\lambda-3)^2 \end{aligned}$$

Ou

Utilizando a regra de Laplace ao longo da 1ª coluna, obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0 = \\ &= (4-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) - (-3)] + (-1) \times [2 \times (4-\lambda) - 0] = \\ &= (4-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) + 3] + (-1) \times [2 \times (4-\lambda)] = (4-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) + 3 - 2] = \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8+1) = (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9) = (4-\lambda)(\lambda-3)^2 \end{aligned}$$

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = 3 \vee \lambda = 3$$

valores próprios de A : 3 e 4 e $m.a. (3) = 2$ e $m.a. (4) = 1$

c) Existirá uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores próprios de A ? Justifique a resposta.

$m.a.(4) = 1 \Rightarrow m.g.(4) = 1$, logo $m.a.(4) = m.g.(4)$ porque $m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda), \forall \lambda$

$$E(3) = \mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $\dim E(3) = m.g.(3) = 1 \neq m.a.(3)$

Não existe uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por 3 vetores próprios de A porque as multiplicidades algébrica e geométrica do valor próprio 3 são diferentes.

- (3v) 4. Uma empresa produz três tipos de fertilizantes A , B e C . Cada tonelada de fertilizante A , B e C gera 50, 40 e 60 unidades de resíduos tóxicos e origina um lucro de 10, 5 e 10 euros, respectivamente. A empresa tem capacidade para produzir até 15 mil toneladas de fertilizante por mês. Compromissos já assumidos obrigam a empresa a entregar mensalmente 5 mil toneladas de fertilizante A a um cliente. Pretende-se determinar o plano de produção mensal que gera a menor quantidade possível de resíduos tóxicos de modo a obter-se um lucro mensal de pelo menos 100 mil euros e uma produção mensal nunca inferior a 80% da capacidade de produção máxima da empresa.

a) Formule o problema em programação linear, atribuindo significado às variáveis.

Variáveis de decisão:

x_A – quantidade (toneladas) a produzir de fertilizante A

x_B – quantidade (toneladas) a produzir de fertilizante B

x_C – quantidade (toneladas) a produzir de fertilizante C

Formulação do problema em termos de programação linear:

$$\min z = 50x_A + 40x_B + 60x_C$$

sujeito a

$$x_A + x_B + x_C \leq 15000$$

$$x_A \geq 5000$$

$$10x_A + 5x_B + 10x_C \geq 100000$$

$$x_A + x_B + x_C \geq 0.8 \times 15000 = 12000$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

b) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\min z = 50x_A + 40x_B + 60x_C$$

sujeito a

$$x_A + x_B + x_C + F_1 = 15000$$

$$x_A - F_2 = 5000$$

$$10x_A + 5x_B + 10x_C - F_3 = 100000$$

$$x_A + x_B + x_C - F_4 = 12000$$

$$x_A, x_B, x_C, F_1, F_2, F_3, F_4 \geq 0$$

c) Considere que se produzem mensalmente 12 mil toneladas de fertilizante que originam um lucro de 100 mil euros e que a produção mensal de fertilizante A é de 8 mil toneladas.

i) Indique as quantidades de fertilizantes B e C produzidas e a quantidade de resíduos tóxicos gerada.

$$\begin{cases} 8000 + x_B + x_C = 12000 \\ 10 \times 8000 + 5x_B + 10x_C = 100000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -x_C + 4000 \\ 5(-x_C + 4000) + 10x_C = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -x_C + 4000 \\ -5x_C + 20000 + 10x_C = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -x_C + 4000 \\ 5x_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 4000 \\ x_C = 0 \end{cases}$$

- ii) Mostre que este plano de produção mensal corresponde a um vértice da região admissível do problema.

Cálculo das folgas:

$$8000 + 4000 + 0 + F_1 = 15000 \Leftrightarrow F_1 = 3000$$

$$8000 - F_2 = 5000 \Leftrightarrow F_2 = 3000$$

$$10 \times 8000 + 5 \times 4000 + 10 \times 0 - F_3 = 100000 \Leftrightarrow F_3 = 0$$

$$8000 + 4000 + 0 - F_4 = 12000 \Leftrightarrow F_4 = 0$$

Logo, a solução $x = (8000, 4000, 0)$ do problema em termos de variáveis de decisão, corresponde à solução $x' = (8000, 4000, 0, 3000, 3000, 0, 0)$ do problema na forma *standard*.

x é um vértice da região admissível sse x' é uma solução básica admissível.

Verificação que x' é uma solução básica admissível:

- 1 – A solução $x' = (8000, 4000, 0, 3000, 3000, 0, 0)$ tem todas as componentes maiores ou iguais a zero (logo é uma solução admissível)
- 2 – A matriz do sistema que define a região admissível do problema na forma *standard* é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Basta observar A para concluir que $\text{car}(A) = 4$, neste caso, igual ao nº de restrições funcionais do problema

A solução $x' = (8000, 4000, 0, 3000, 3000, 0, 0)$ tem 3 componentes nulas $\geq 7 - 4 =$ nº de variáveis (incluindo as variáveis de folga) $-\text{car}(A)$

- 3 – As colunas da matriz A associadas às componentes não nulas de x' constituem um conjunto linearmente independente de vetores porque, aplicando o método de Gauss à matriz só com estas colunas, obtém-se uma matriz em escada em que todas as colunas têm *pivot*,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$