Matemática I

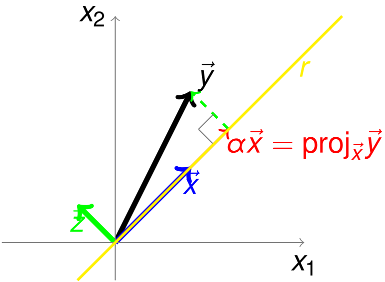
14 Out 2022

Isabel Martins

Resumo

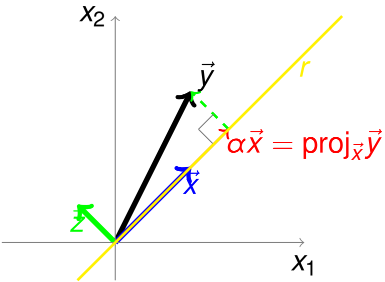
Ainda sobre projecções ortogonais

Projecção ortogonal de um vector sobre uma recta que passa na origem



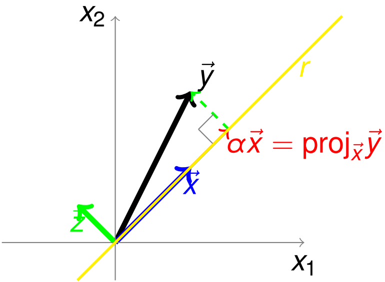
- $\text{proj}_r \vec{y} = \text{proj}_{\vec{x}} \vec{y}$ em que $\vec{x}$ é um vector da recta r

Projecção ortogonal de um vector sobre uma recta que passa na origem



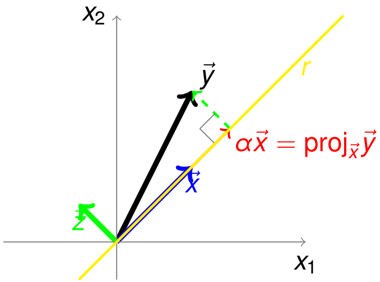
- $\text{proj}_r\vec{y} = \text{proj}_{\vec{x}}\vec{y}$ em que $\vec{x}$ é um vector da recta r
- A $\text{proj}_r\vec{y}$ é o vector da recta r mais próximo de $\vec{y}$

Projecção ortogonal de um vector sobre uma recta que passa na origem



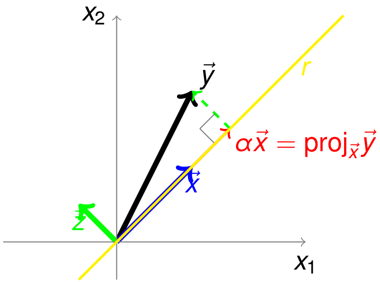
- $\text{proj}_r\vec{y} = \text{proj}_{\vec{x}}\vec{y}$ em que $\vec{x}$ é um vector da recta r
- A $\text{proj}_r\vec{y}$ é o vector da recta r mais próximo de $\vec{y}$
- A distância do vector $\vec{y}$ à recta r é dada por $||\vec{y} - \text{proj}_r\vec{y}||$

Exemplo



A recta r é $y = x$ que tem o vector $\vec{x} = (1, 1)$

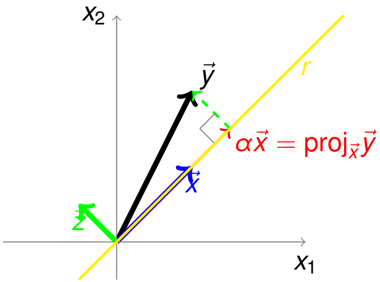
Exemplo



A recta r é $y = x$ que tem o vector $\vec{x} = (1, 1)$

- $\text{proj}_r\vec{y} = \text{proj}_{\vec{x}}\vec{y} = (3/2, 3/2)$

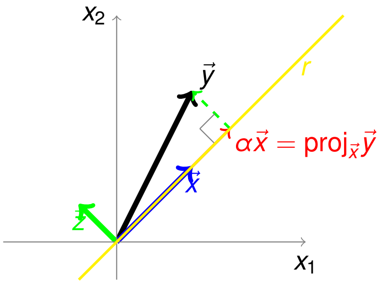
Exemplo



A recta r é $y = x$ que tem o vector $\vec{x} = (1, 1)$

- $\text{proj}_r\vec{y} = \text{proj}_{\vec{x}}\vec{y} = (3/2, 3/2)$
- O vector $(3/2, 3/2)$ é o vector da recta r mais próximo de $\vec{y}$

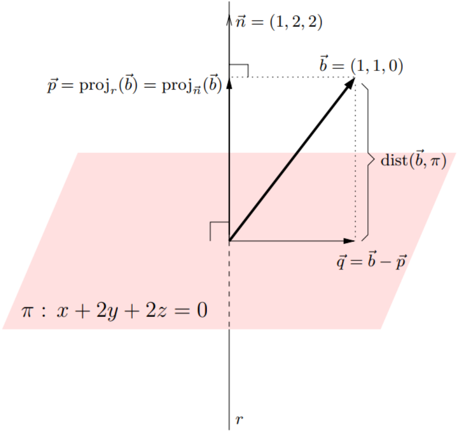
Exemplo



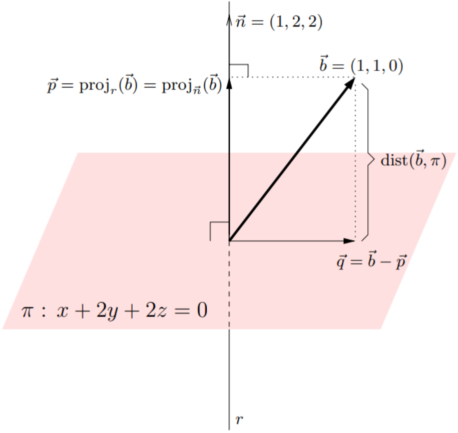
A recta r é $y = x$ que tem o vector $\vec{x} = (1, 1)$

- $\text{proj}_r\vec{y} = \text{proj}_{\vec{x}}\vec{y} = (3/2, 3/2)$
- O vector $(3/2, 3/2)$ é o vector da recta r mais próximo de $\vec{y}$
- A distância do vector $\vec{y}$ à recta r é dada por $||\vec{y} - \text{proj}_r\vec{y}|| = ||(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})|| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Distância de um vector a um plano que passa na origem e projecção ortogonal do vector sobre o plano



Distância de um vector a um plano que passa na origem e projecção ortogonal do vector sobre o plano



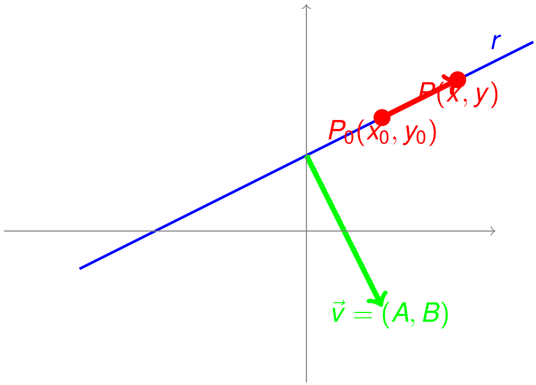
- $d(\vec{b}, \pi) = ||\mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{b}||$ e $\mathrm{proj}_{\pi}\vec{b} = b - \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{b}$

Fonte: Os Espacialistas

Equação geral de uma recta em $\mathbb{R}^2$

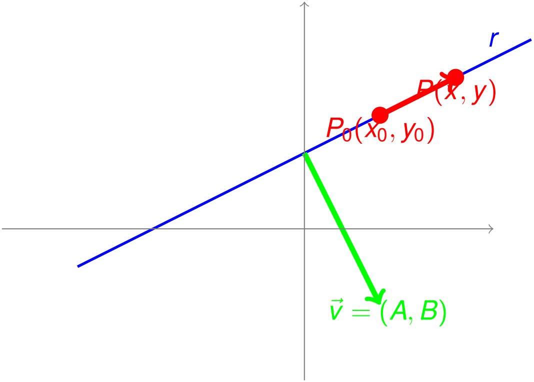
Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,



Rectas em $\mathbb{R}^2$

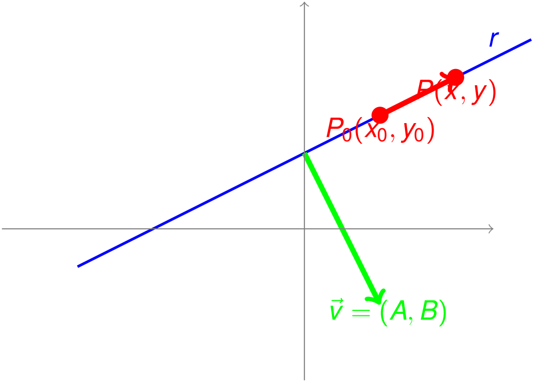
Genericamente,



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

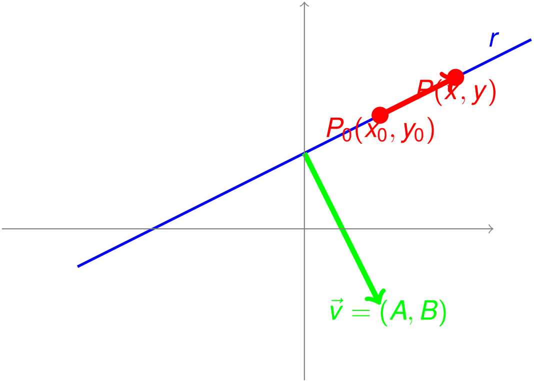


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

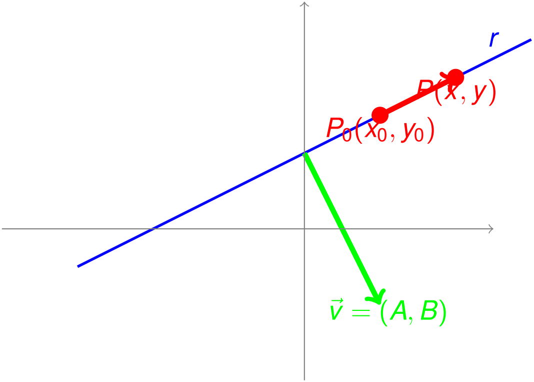


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) | (A, B) = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

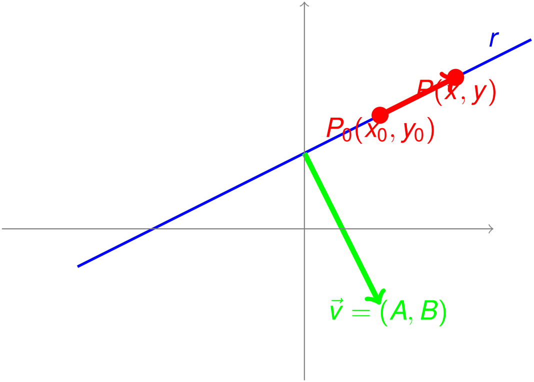


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P} | \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) | (A, B) = 0 \Leftrightarrow$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

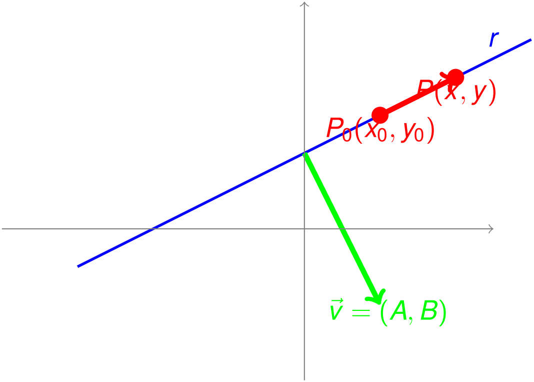


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P}|\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)|(A, B) = 0 \Leftrightarrow$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C} \Leftrightarrow$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,

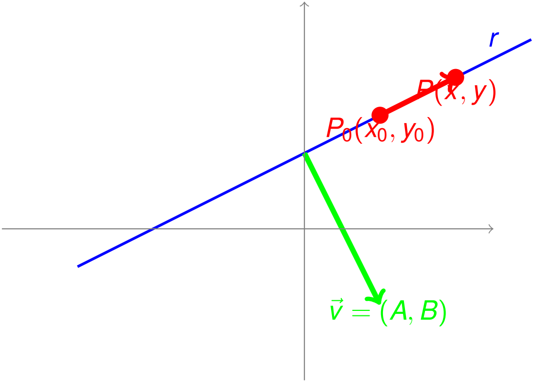


vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P}|\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)|(A, B) = 0 \Leftrightarrow$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C} \Leftrightarrow Ax + By = C$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Genericamente,



vector $\perp$ à recta r $\vec{v} = (A, B)$

Os pontos da recta r são (x, y) : $\vec{P_0P}|\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)|(A, B) = 0 \Leftrightarrow$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C} \Leftrightarrow Ax + By = C$

A recta r é $\perp$ ao vector (A, B) e passa no ponto (x_0, y_0)

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação geral de uma recta em $\mathbb{R}^2$

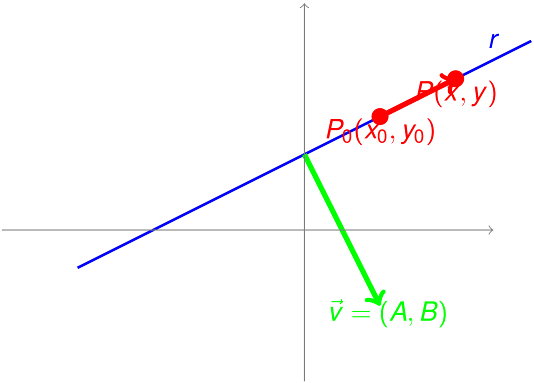
- Recta $\perp$ ao vector $\vec{v} = (A, B)$ e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$Ax + By = C \text{ tal que } Ax_0 + By_0 = C \quad (P_0 \text{ é solução da equação}).$$

Equação declive-ponto e equação declive-ordenada na origem de uma recta não vertical em $\mathbb{R}^2$

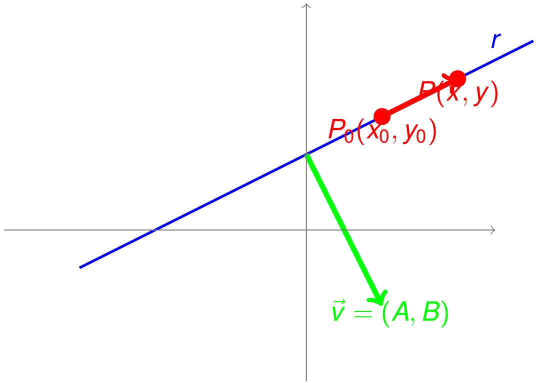
Rectas em $\mathbb{R}^2$

Rectas não verticais



Rectas em $\mathbb{R}^2$

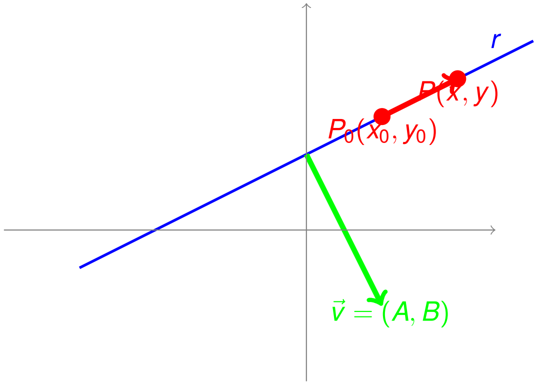
Rectas não verticais



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

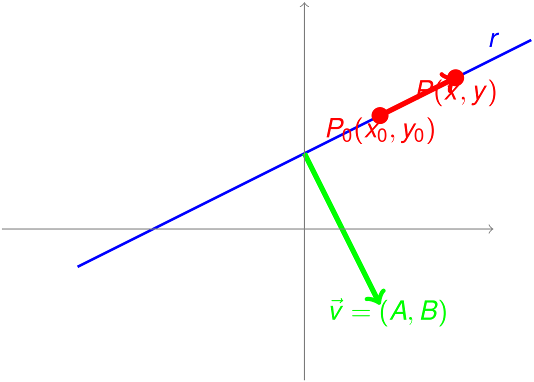
Rectas não verticais



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0)$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

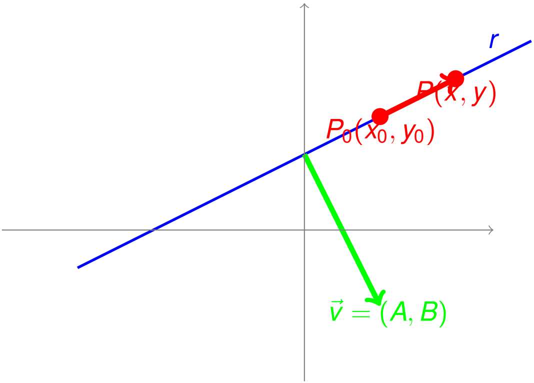
Rectas não verticais



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{B \neq 0} y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Rectas não verticais

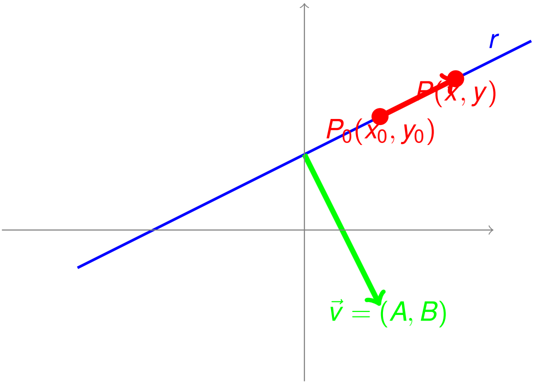


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{B \neq 0} y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = y_0 - \frac{A}{B}(x - x_0)$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Rectas não verticais

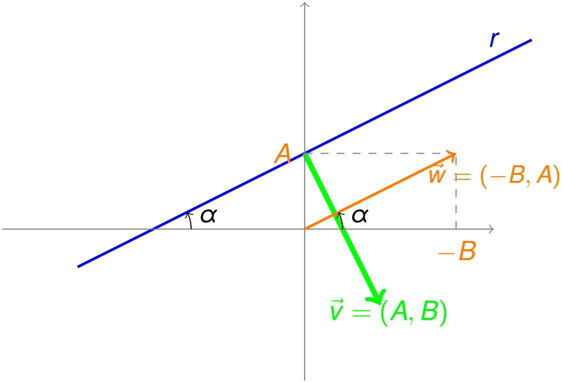


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow B(y - y_0) = -A(x - x_0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{B \neq 0} y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = y_0 - \frac{A}{B}(x - x_0)$$ O que é $-\frac{A}{B}$?

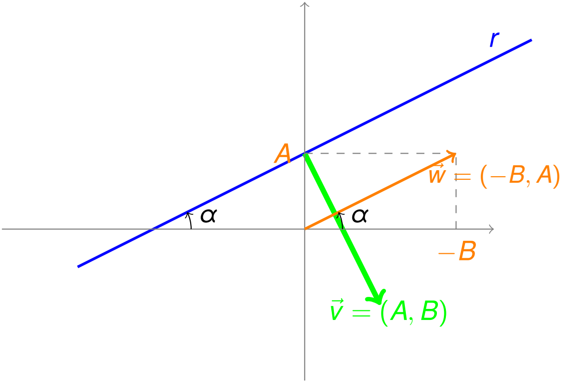
Rectas em $\mathbb{R}^2$

O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Rectas em $\mathbb{R}^2$

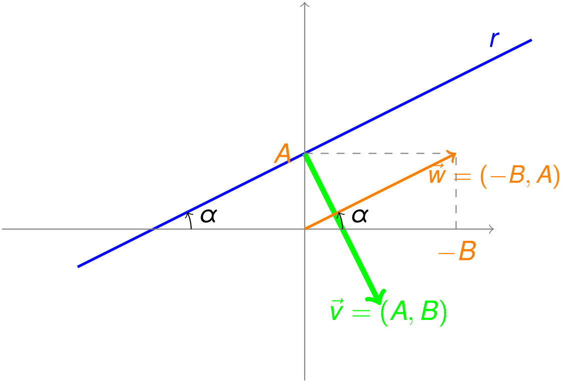
O que é $-\frac{A}{B}$?



Declive da recta - $\tan\alpha$ **(α é o menor ângulo positivo que a recta faz com o eixo das abcissas)**

Rectas em $\mathbb{R}^2$

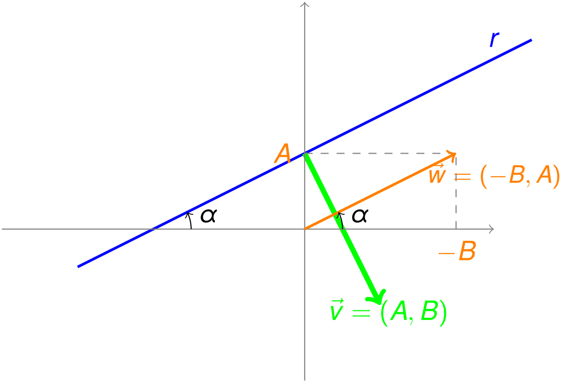
O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Declive da recta - $\tan\alpha$ (α é o menor ângulo positivo que a recta faz com o eixo das abcissas) $\tan\alpha = \dfrac{A}{-B} =$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

O que é $-\dfrac{A}{B}$?



Declive da recta - $\tan\alpha$ (**α é o menor ângulo positivo que a recta faz com o eixo das abcissas)** $\tan\alpha = \dfrac{A}{-B} = -\dfrac{A}{B}$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow y = mx + \underbrace{y_0 - mx_0}_{b} \Leftrightarrow$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow y = mx + \underbrace{y_0 - mx_0}_{b} \Leftrightarrow$$

$$y = mx + b$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

Equação declive-ponto de uma recta não vertical

- Recta com declive m e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + mx - mx_0 \Leftrightarrow y = mx + \underbrace{y_0 - mx_0}_{b} \Leftrightarrow$$

$$y = mx + b$$

Equação declive-ordenada na origem de uma recta não vertical

- Recta com declive m e ordenada na origem b

$$y = mx + b \text{ (Equação reduzida).}$$

Rectas em $\mathbb{R}^2$

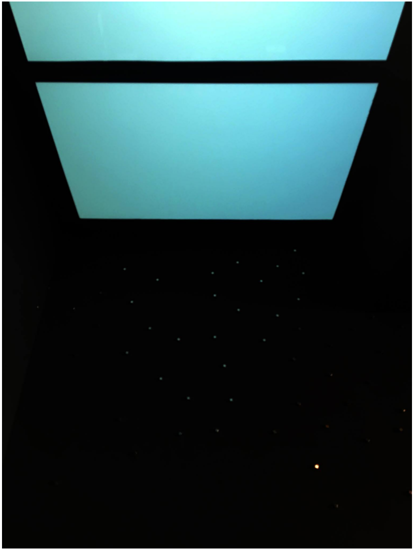
Elementos necessários para definir uma recta em $\mathbb{R}^2$

- Um ponto da recta + um vector da recta
- Dois pontos da recta
- Um ponto da recta + um vector $\perp$ à recta
- Um ponto da recta + o declive da recta
- Um ponto da recta + ordenada na origem

Rectas em $\mathbb{R}^3$

Elementos necessários para definir uma recta em $\mathbb{R}^3$

- Um ponto da recta + um vector da recta
- Dois pontos da recta
- Dois planos de $\mathbb{R}^3$ concorrentes


Fonte: Os Espacialistas

Equação geral de um plano em $\mathbb{R}^3$

Planos em $\mathbb{R}^3$

Equação geral de um plano em $\mathbb{R}^3$

- Plano $\perp$ ao vector $\vec{v} = (A, B, C)$ e passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$Ax + By + Cz = D \text{ tal que } Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$$

(P_0 é solução da equação).

Planos em $\mathbb{R}^3$

Elementos necessários para definir um plano em $\mathbb{R}^3$

- Um ponto do plano + dois vectores do plano não colineares
- Três pontos do plano não colineares
- Um ponto do plano + um vector $\perp$ ao plano

Colinearidade

$\vec{v}$ colinear com $\vec{u} \neq \vec{0}$

Sejam os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} \neq \vec{0}$. $\vec{v}$ é colinear com $\vec{u}$ se

$$\text{existir um } k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{u}.$$

- (2,4) é colinear com (1,2), pois (2,4)=2(1,2)
- (2,4) não é colinear com (1,0), pois não existe um $k \in \mathbb{R}$: (2,4)=k(1,0)

Três pontos colineares

Três pontos A, B e C são colineares se existir uma recta que os contenha.

TPC

TPC + Bons estudos!

Da lista de Exercícios de “Noções de geometria analítica”

Exercícios 57 a 60

Responder às seguintes questões (slides seguintes)

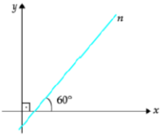
TPC

1.

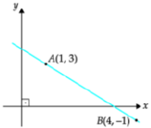
Determine o coeficiente angular das retas abaixo:

a) $r : 2x + 3y + 1 = 0$

b) no gráfico:



c) no gráfico:



TPC

2. Escreva a equação reduzida da recta que passa pelos pontos $A(2,5)$ e $B(4,9)$.

3. Escreva a equação geral de cada um dos seguintes planos:

   a) Contém o ponto $A = (1,2,0)$ e os vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ e $\vec{v} = (2,3,-1)$
   b) Contém os pontos $A = (1,1,0)$ e $B = (1,-1,-1)$ e o vector $\vec{v} = (2,1,0)$
   c) Contém os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,-1,0)$

4. Verifique quais dos seguintes vectores são paralelos ao plano $\pi : 4x - 6y + z - 3 = 0$

   a) (-1,-2,3)
   b) (0,1,6)
   c) (3,2,0)
   d) (-3,2,24).

5. Obtenha um vector normal a cada um dos seguintes planos

   a) Contém os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$ e $C = (1,2,3)$
   b) $x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Exercícios

6. Estude a posição relativa dos planos $2x - y + 2z - 1 = 0$ e $4x - 2y + 4z = 0$.