Programação linear

Marta Mesquita

ISA, DCEB - Secção de Matemática

January 9, 2022

Problema 1

Uma exploração agrícola dispõe de 80 ha de terra para produzir tomate e trigo. Para além da terra, os recursos susceptíveis de limitar a produção das duas culturas são a água para rega e a mão de obra - existem 320000 m^3 de água e 2000 horas de mão de obra. Sabe-se que cada hectare de tomate necessita de 8000 m^3 de água e 40 h de mão de obra, enquanto cada hectare de trigo necessita apenas de 20 h de mão de obra. A receita de cada hectare de tomate e trigo é, repectivamente, 300 € e 200 €. Pretende-se determinar a área a destinar a cada cultura de forma a maximizar a receita.(*)

(*) Retirado dos Apontamentos de Álgebra Linear, Jorge Orestes Cerdeira, Instituto Superior de Agronomia, 2012.

Dados

Vamos condensar informação numa tabela.

	Recursos		
	Água	Mão de obra	Receita
Tomate	8000 m^3/ha	40 h/ha	300 €/ha
Trigo		20 h/ha	200 €/ha
	$\leq$ 320000 m^3	$\leq$ 2000 h	max

Sabemos ainda que 80 ha de terra estão disponíveis para a produção de tomate e trigo.

Formulação do problema

Temos de decidir quantos hectares de tomate e quantos hectares de trigo se vai cultivar.

- **Variáveis de decisão**
  x - o número de hectares a atribuir ao tomate
  y - o número de hectares a atribuir ao trigo

Pretendemos maximizar a receita

- **Função objectivo**: $z = 300x + 200y$
  max $z = 300x + 200y$

Restrições

Restrições funcionais :
A área total de cultivo não excede os 80 ha:

$$x + y \leq 80.$$

O consumo de água com x ha de tomate não excede os 320000 m^3:

$$8000x \leq 320000.$$

A mão de obra utilizada no cultivo de x ha de tomate e em y ha de trigo não deve exceder a mão de obra disponível:

$$40x + 20y \leq 2000.$$

Restrições de sinal :

$$x, y \geq 0.$$

Modelo de PL - Problema 1

$$\max\ z = 300x + 200y$$

$$\begin{cases} x & + & y & \leq & 80 \\ 8000x & & & \leq & 320000 \\ 40x & + & 20y & \leq & 2000 \\ x & , & y & \geq & 0 \end{cases}$$

x - o número de hectares a atribuir ao tomate
y - o número de hectares a atribuir ao trigo

Modelo de PL - caso geral

Função objectivo: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k$
max (min) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k$

Restrições funcionais:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_2 & (2) \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mk}x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_m & (m) \end{cases}$$

Restrições de sinal
$x_1, x_2, ..., x_k \geq, \leq 0$ ou livre

As constantes c_j $(j = 1, ..., k)$, a_{ij} $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., k)$ e b_i $(i = 1, ..., m)$ são parâmetros do problema.

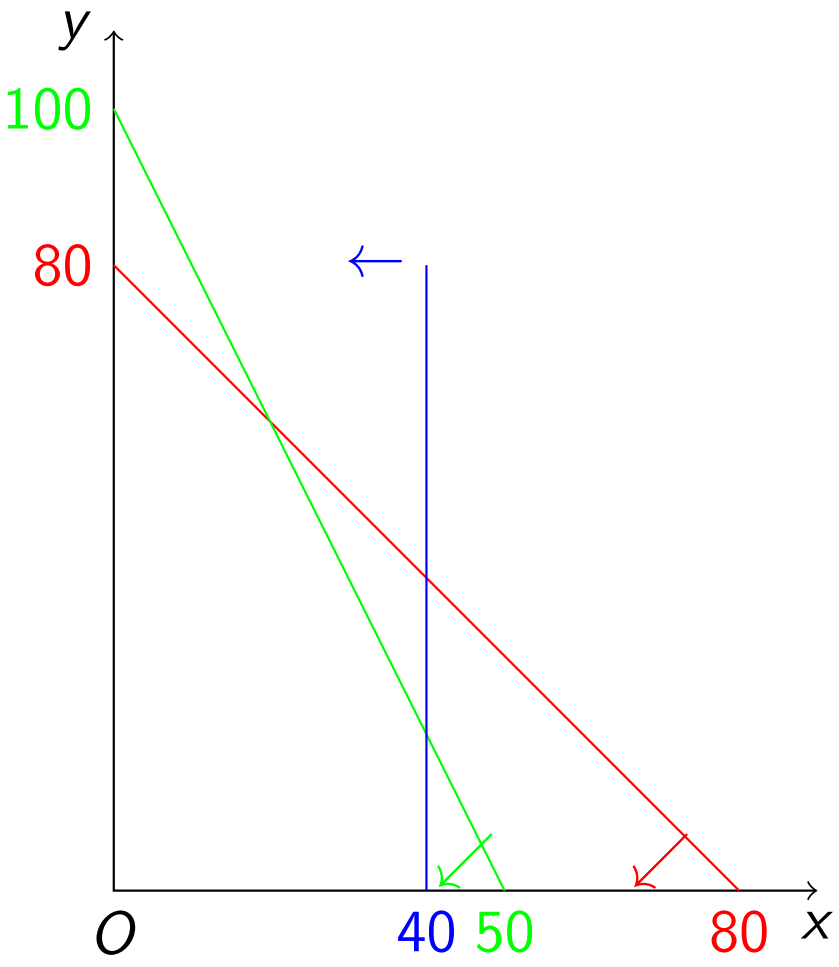
Abordagem geométrica

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k \leq (ou \ \geq) b_i \longrightarrow$ semi-espaço
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k = b_i \longrightarrow$ hiperplano

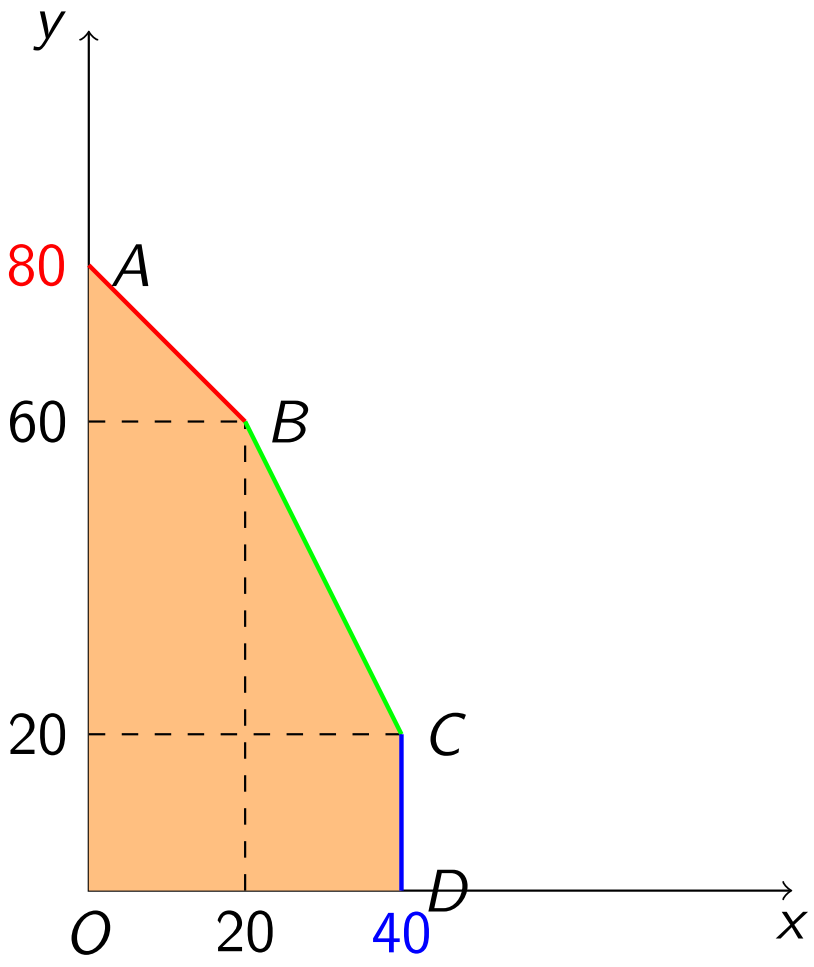
- Ao conjunto de pontos que satisfazem as restrições dá-se o nome de **região admissível**.
- Um ponto da região admissível designa-se por **solução admissível**.
- A solução admissível que otimiza a função objetivo chama-se **solução ótima**.

A região admissível é a interseção de um número finito de semi-espaços (fechados).

Resolução gráfica - região admissível



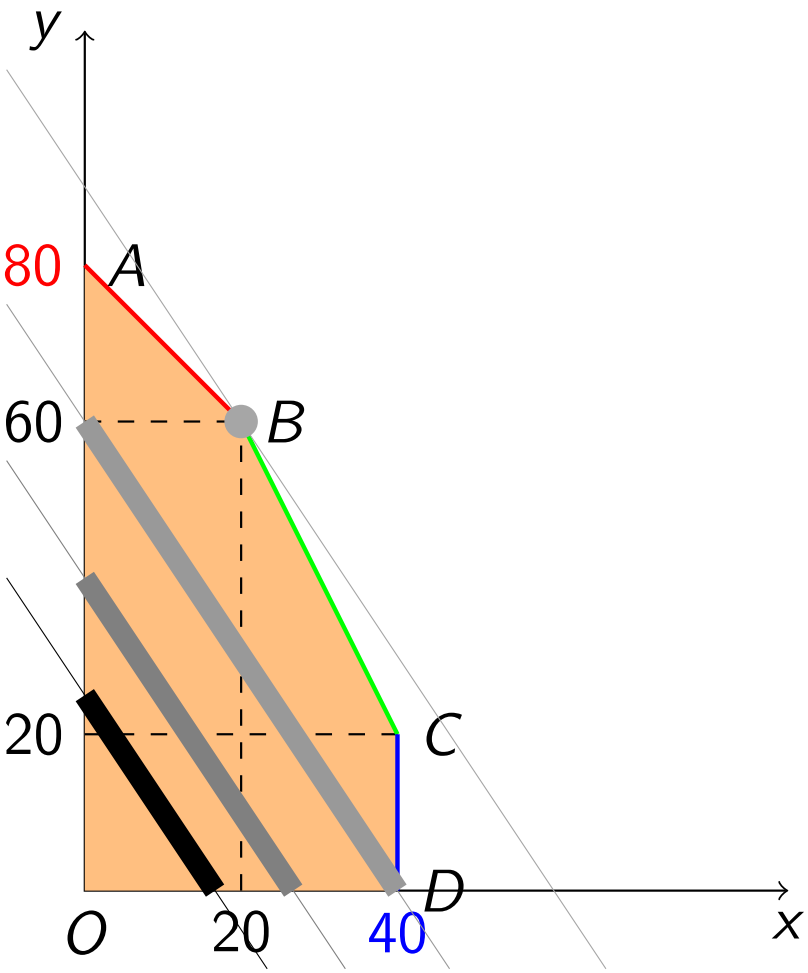
Resolução gráfica - região admissível



Resolução gráfica - função objetivo

Pretende-se determinar o ponto da região admissível que maximiza a função objetivo.
Represente-se a função objetivo através da reta $300x + 200y = c$, em que c é uma constante. Por exemplo, $300x + 200y = 5000$. A intersecção de $300x + 200y = 5000$ com a região admissível dá o conjunto de soluções admissíveis cuja receita é 5000 €.
Incrementa-se o valor da receita se deslocarmos a reta $300x + 200y = c$, paralelamente a si mesma, no sentido em que o valor da constante c aumenta

Resolução gráfica - função objetivo



Resolução gráfica - função objetivo

- A solução ótima é atingida quando a reta passa no vértice $B = (20, 60)$ da região admissível.
- O valor da solução ótima é $300 \times 20 + 200 \times 60 = 18000$.
- A solução ótima utiliza toda a área de cultivo e esgota a mão de obra disponível. Diz-se que as restrições $x + y \leq 80$ e $40x + 20y \leq 2000$ estão saturadas.

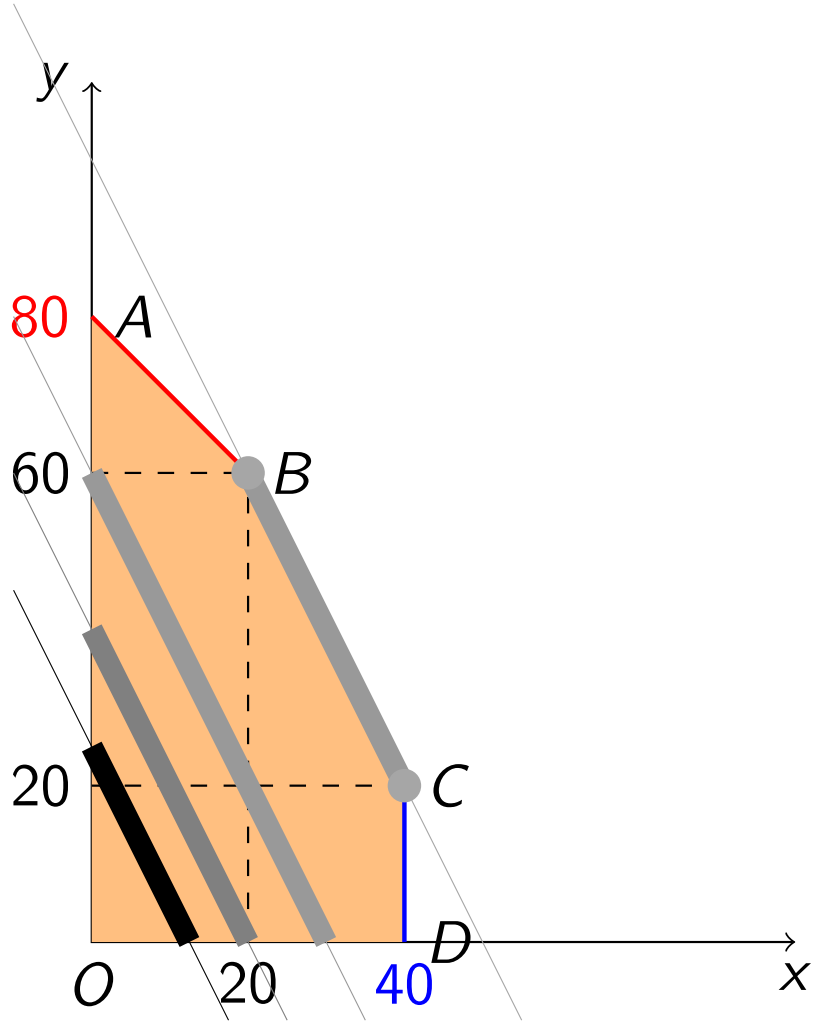
Soluções ótimas alternativas

- No Problema 1 considere-se que a receita de cada hectare de tomate é de 400 €. A função objetivo passa a ser

  max z=$400x + 200y$

- O problema tem uma infinidade de soluções ótimas alternativas $x^* \longrightarrow$ os pontos sobre o segmento de recta BC.

- Se x_1^* e x_2^* são soluções ótimas de um problema de PL (P) então $x^* = \lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ é solução ótima de (P).



Região admissível não limitada

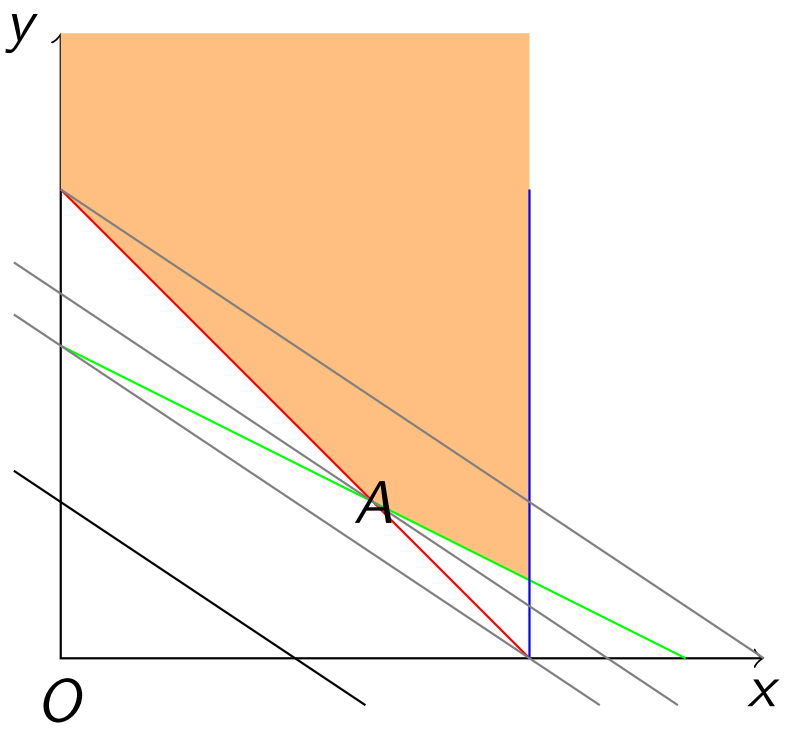
Se a região admissível é não limitada, o problema pode não ter solução ótima

$$\min z = x + 1.5y$$
$$\begin{cases} x + y \geq 300 \\ x + 2y \geq 400 \\ x \leq 300 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$A = (200, 100)$ é solução ótima

$$\max z = x + 1.5y$$
$$\begin{cases} x + y \geq 300 \\ x + 2y \geq 400 \\ x \leq 300 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Não tem solução ótima

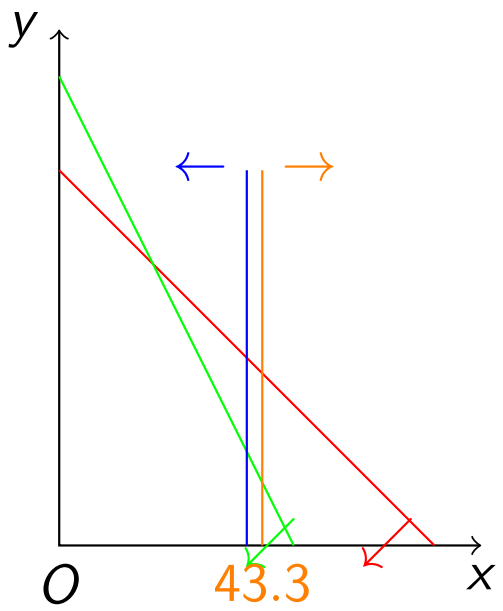


Região admissível vazia

Consideremos que no Problema 1 se acrescenta: pretende-se produzir pelo menos 3250 t de tomate. Considerando que a produtividade média do tomate é 75 t/ha, a restrição adicional é dada por

$$75x \geq 3250.$$

A região admissível é um conjunto vazio. O problema não tem solução.



Problema de PL - Abordagem geométrica

Considere o problema de PL, (P),

$$\max \text{ (ou min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1k}x_k \leq & (\geq \text{ ou } =) \; b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2k}x_k \leq & (\geq \text{ ou } =) \; b_2 \\ ... & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mk}x_k \leq & (\geq \text{ ou } =) \; b_m \\ x_1 & , & x_2 & , & ... & , & x_k \geq 0 & (\leq 0 \text{ ou livre}) \end{cases}$$

Denote-se por $\mathcal{R}$ a região admissível de (P).

Teorema

Se $\mathcal{R}$ é não vazia e limitada então

1. *Existe um vértice de $\mathcal{R}$ que é solução ótima de (P);*
2. *Se q vértices de $\mathcal{R}$, $v_1, ..., v_q$, são soluções ótimas de (P) então $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_q v_q$, em que $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_q = 1$ e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q \geq 0$, é solução ótima de (P).*

Problema 1 (cont)

Vértices da região admissível: O, A, B, C e D.
Como a região admissível é limitada (e não vazia), podemos determinar a solução ótima calculando o valor da receita em cada um destes vértices, e selecionar o vértice com a receita mais elevada.

Vértice (x, y)	$z = 300x + 200y$
O (0,0)	0
A (0,80)	16000
B (20,60)	**18000**
C (40,20)	16000
D (40,0)	12000

Forma *standard*

- Vamos ver que os vértices da região admissível podem ser obtidos resolvendo sistemas de equações lineares
- Vamos descrever a região admissível de um problema de PL através de um sistema de equações em que as variáveis são não negativas. Isto é, vamos escrever o problema na forma *standard*.

Forma *standard* - problema 1

$$\max z = 300x + 200y$$

$$\begin{cases} x + y + f_1 = 80 \\ 8000x + f_2 = 320000 \\ 40x + 20y + f_3 = 2000 \\ x, y, f_1, f_2, f_3 \geq 0 \end{cases}$$

x - o número de hectares a atribuir ao tomate

y - o número de hectares a atribuir ao trigo

f_1 = área (em ha) não cultivada

f_2 = quantidade de água (em m^3) não utilizada

f_3 = número de horas de trabalho não utilizadas.

Às variáveis f_1, f_2, f_3 chamamos **variáveis folga**

Forma *standard* - Regras

1. A restrição de sinal do tipo $x_j \leq 0$ é substituída por $x_j' \geq 0$, sendo a variável x_j substituída pela expressão $-x_j'$ nas restrições funcionais e função objetivo;
2. A restrição de sinal do tipo x_j livre é substituída por duas restrições de sinal $x_j', x_j'' \geq 0$, sendo x_j substituído pela expressão $x_j' - x_j''$ nas restrições funcionais e função objetivo;
3. As restrições $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k \leq b_i$ são substituídas por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k + f_i = b_i$ e $f_i \geq 0$;
4. As restrições $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k \geq b_i$ são substituídas por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k - f_i = b_i$ e $f_i \geq 0$;
5. Os coeficientes das variáveis f_i na função objetivo são nulos.

Forma *standard*

Denote-se por $\mathcal{R}$ a região admissível de um problema de PL com k variáveis não negativas, $x_1, x_2, ..., x_k$. Denote-se por $\mathcal{F}$ a região admissível do correspondente problema de PL na forma *standard* com $k + m$ variáveis, $x_1, x_2, ..., x_k, f_1, ..., f_m$.

- Existe uma correspondência que associa soluções $(x_1, x_2, ..., x_k)$ de $\mathcal{R}$ a soluções $(x_1, x_2, ..., x_k, f_1, ..., f_m)$ de $\mathcal{F}$.

Forma *standard* - Problema 1 (cont)

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & y & \leq & 80 \\ 8000x & & & \leq & 320000 \\ 40x & + & 20y & \leq & 2000 \\ x & , & y & \geq & 0 \end{array}\right\} \mathcal{R}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{F} = \{(x, y, f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^5 : \\ \begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & f_1 & & & & & = 80; \\ 8000x & & & & & + & f_2 & & & = 320000; \\ 40x & + & 20y & & & & & + & f_3 & = 2000; \\ x, & y, & f_1, & f_2, & f_3 & \geq 0\} & & & & \end{array} \end{array}$$

Exemplos:

$(0, 0) \in \mathcal{R} \longleftrightarrow (0, 0, 80, 320000, 2000) \in \mathcal{F}$

$(40, 20) \in \mathcal{R} \longleftrightarrow (40, 20, 20, 0, 0) \in \mathcal{F}$

$(30, 40) \in \mathcal{R} \longleftrightarrow (30, 40, 10, 80000, 0) \in \mathcal{F}$

Forma *standard* - Problema 1 (cont)

Podemos escrever a região admissível do Problema 1 na forma *standard* utilizando notação matricial:

$$\mathcal{F} = \{(x, y, f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^5 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8000 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 320000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

$$x, y, f_1, f_2.f_3 \geq 0\}$$

Como identificar as soluções de $\mathcal{F}$ que correspondem a vértices da região admissível?

Soluções básicas (admissíveis)

Considere-se o problema de PL na forma *standard*:

$$\begin{array}{lrcl} \max & z & = & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

em que A é uma matriz de tipo $m \times n$ $(m < n)$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Vamos admitir que car$(A) = m$. Seja $\beta = \{A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_m}\}$ um conjunto de m colunas de A linearmente independente.

- Chama-se **solução básica** à solução que se obtém resolvendo o sistema nas variáveis associadas às colunas de β e fazendo as restantes variáveis iguais a zero.
- As variáveis associadas às colunas de β são designadas por **variáveis básicas** e as restantes $n - m$ variáveis por **variáveis não básicas**.
- Dá-se o nome de **solução básica admissível** (sba) a uma solução básica que não tem componentes negativas.

Soluções básicas admissíveis

Note que uma s.b.a.

- é solução de $Ax = b$
- tem as componentes não negativas
- tem, pelo menos, $n - m$ componentes nulas
- o conjunto das colunas de A associadas às componentes não nulas é linearmente independente.

Soluções básicas admissíveis de $\mathcal{F}$ e vértices de $\mathcal{R}$

Seja $\mathcal{R}$ a região admissível de um problema de PL com k variáveis não negativas e seja $\mathcal{F}$ a região admissível do correspondente problema de PL na forma *standard* com $k + m$ variáveis.

Prova-se que $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_k)$ é vértice de $\mathcal{R}$ se e só se $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_k, \bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_m)$ é s.b.a. de $\mathcal{F}$.

Problema 1 (cont)

	$(x, y) \in \mathcal{R}$	$(x, y, f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}$	
Vértices	O (0,0)	(0,0,80,320000,2000)	sba_s
	A (0,80)	(0,80,0,320000,400)	
	B (20,60)	(20,60,0,160000,0)	
	C (40,20)	(40,20,20,0,0)	
	D (40,0)	(40,0,40,0,400)	
	I (30,40)	(30,40,10,80000,0)	
	J (20,20)	(20,20,40,160000,800)	

- O problema na forma *standard* tem 5 variáveis e $car(A) = 3$. Para uma solução admissível de $\mathcal{F}$ corresponder a um vértice de $\mathcal{R}$ tem de ter pelo menos 5-3=2 componentes nulas e o conjunto das colunas de A associadas às componentes não nulas tem de ser linearmente independente.