Matemática I - 2022/23

Aula 7 Nov

Isabel Martins

Sinopse

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (n$^{\text{o}}$ de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

  - Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado.

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

  - Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado. **R:** $1.025P$

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \left[p_{ij}\right],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \left[q_j\right],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

  - Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado. **R:** $1.025P$

  - Calcule o preço médio das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) nos dois anos referidos, por mercado.

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

- Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado. **R:** $1.025P$

- Calcule o preço médio das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) nos dois anos referidos, por mercado.
R: $\frac{1}{2}(P + 1.025P)$

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

  - Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado. **R:** $1.025P$

  - Calcule o preço médio das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) nos dois anos referidos, por mercado.
    R: $\frac{1}{2}(P + 1.025P)$

  - Calcule o valor que a pessoa iria gastar este ano, por mercado.

Motivação

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}] \,,$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j] \,,$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

  - Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado. **R:** $1.025P$

  - Calcule o preço médio das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) nos dois anos referidos, por mercado.
    R: $\frac{1}{2}(P + 1.025P)$

  - Calcule o valor que a pessoa iria gastar este ano, por mercado. **R:** Pq

Motivação

A persistência da memória, S. Dali

$$\begin{bmatrix} \frac{79}{80} & 0 \\ 0 & \frac{39}{40} \end{bmatrix}$$

largura: 580 pixel
altura: 418 pixel

10 aplicações

50 aplicações

Motivação

Auto-retrato, V. Gogh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

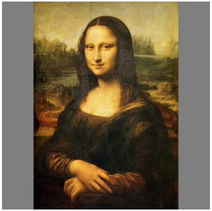
largura: 563 pixel
altura: 705 pixel

20 aplicações

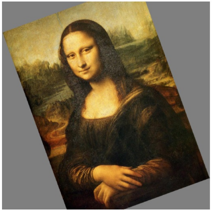
100 aplicações

Motivação
Mona Lisa, L. da Vinci

$$\begin{bmatrix} \cos 1^{o} & -\sin 1^{o} \\ \sin 1^{o} & \cos 1^{o} \end{bmatrix}$$



largura: 400 pixel
altura: 572 pixel



20 aplicações

100 aplicações

Fonte: J. L. Akridge, R. Bowman, P. Hamburger, B. Kessler, Using Works of Visual Art to Teach Matrix Transformations, Western Kentucky University, Mathematics Faculty Publications, 2009.

Matrizes

Matriz A do tipo $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denota-se $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, em que a_{ij} é o elemento de A que se encontra na linha i e na coluna j

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 em que

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 em que

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 3, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -3$$

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 em que

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 3, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -3$$

- Se $a_{ij} = 0$ para todo o i, j, A diz-se matriz *nula* e denota-se por $\mathbf{0}$

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 em que

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 3, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -3$$

- Se $a_{ij} = 0$ para todo o i, j, A diz-se matriz *nula* e denota-se por **0**

- $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 30 \end{bmatrix} = (1, -2, 30) \in \mathbb{R}^3$ é uma *matriz-coluna ou vector*

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 em que

  $$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 3, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -3$$

- Se $a_{ij} = 0$ para todo o i, j, A diz-se matriz *nula* e denota-se por $\mathbf{0}$

- $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 30 \end{bmatrix} = (1, -2, 30) \in \mathbb{R}^3$ é uma *matriz-coluna ou vector*

- $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é uma *matriz-linha*

Exemplos

- $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  A é uma *matriz quadrada* do tipo $n \times n$ (de ordem n)

  Os elementos a_{11}, a_{22},..., a_{nn} constituem a *diagonal principal* de A

Exemplos

- $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  A é uma *matriz quadrada* do tipo $n \times n$ (de ordem n)

  Os elementos a_{11}, $a_{22}, \ldots$, a_{nn} constituem a *diagonal principal* de A

- Chama-se *matriz identidade de ordem n* à matriz quadrada de ordem n com os elementos da diagonal principal = 1 e os restantes elementos = 0

Exemplos

- $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  A é uma *matriz quadrada* do tipo $n \times n$ (de ordem n)

  Os elementos a_{11}, $a_{22}, \ldots,$ a_{nn} constituem a *diagonal principal* de A

- Chama-se *matriz identidade de ordem n* à matriz quadrada de ordem n com os elementos da diagonal principal = 1 e os restantes elementos = 0

$$\text{Ex: } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações algébricas com matrizes

Transposição de matrizes

- A matriz *transposta* de $A_{m \times n}$ é a matriz $A^T_{n \times m}$ cujas linhas são as colunas de A escritas pela mesma ordem

Operações algébricas com matrizes

Transposição de matrizes

- A matriz *transposta* de $A_{m\times n}$ é a matriz $A^T_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A escritas pela mesma ordem

$$\text{Ex: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Operações algébricas com matrizes

Transposição de matrizes

- A matriz *transposta* de $A_{m\times n}$ é a matriz $A^T_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A escritas pela mesma ordem

$$\text{Ex: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$ diz-se *simétrica*

Operações algébricas com matrizes

Transposição de matrizes

- A matriz *transposta* de $A_{m\times n}$ é a matriz $A^T_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A escritas pela mesma ordem

$$\text{Ex: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$ diz-se *simétrica*

[Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são iguais se forem do mesmo tipo e $a_{ij} = b_{ij}$ para todo o i e j]

Operações algébricas com matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix}$$ é simétrica se e só se

Operações algébricas com matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix}$$ é simétrica se e só se

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 4 & 3 & \gamma \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Operações algébricas com matrizes

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix}$ é simétrica se e só se

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 4 & 3 & \gamma \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

isto é, se e só se $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $\gamma = -3$

Operações algébricas com matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} \text{ é simétrica se e só se}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 4 & 3 & \gamma \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

isto é, se e só se $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $\gamma = -3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Operações algébricas com matrizes

Soma de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do <u>mesmo tipo</u> $m \times n$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Operações algébricas com matrizes

Soma de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do mesmo tipo $m \times n$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 20 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Operações algébricas com matrizes

Soma de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do mesmo tipo $m \times n$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 20 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 3 & 16 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 17 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Operações algébricas com matrizes

Produto de uma matriz por um escalar

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Operações algébricas com matrizes

Produto de uma matriz por um escalar

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Ex: $100 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 4} =$

Operações algébricas com matrizes

Produto de uma matriz por um escalar

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

$$\text{Ex: } 100 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & -100 & 400 \\ 200 & 300 & -400 & 500 \\ 0 & 500 & 100 & 700 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Propriedades das operações com matrizes

Sejam

A, B, C matrizes do tipo adequado

I a matriz identidade da ordem adequada

$\mathbf{0}$ a matriz nula de ordem adequada

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Transposição

- $(A^T)^T =$

Transposição

- $(A^T)^T = A$

Produto escalar

- $\lambda A = A\lambda$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda A)^T =$

Produto escalar

- $\lambda A = A\lambda$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Soma de matrizes

- $A + B =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m \times n} + \mathbf{0}_{m \times n} =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$
- $(A + B)^T =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\lambda(A + B) =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A =$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- Sendo $A_{n\times n}$, $A + A^T$ é simétrica

Soma de matrizes

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = A_{m\times n}$
- $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- Sendo $A_{n\times n}$, $A + A^T$ é simétrica $\quad [A + A^T = (A + A^T)^T]$

Voltando ao slide 2

- $P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}]$ e $q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j]$
  - $1.025P = 1.025 \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5375 & 2.05 \\ 1.28125 & 2.5625 \\ 2.05 & 3.075 \end{bmatrix}$

Voltando ao slide 2

- $P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}]$ e $q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j]$
  - $1.025P = 1.025 \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5375 & 2.05 \\ 1.28125 & 2.5625 \\ 2.05 & 3.075 \end{bmatrix}$
  - $\frac{1}{2}(P + 1.025P) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5375 & 2.05 \\ 1.28125 & 2.5625 \\ 2.05 & 3.075 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.51875 & 2.025 \\ 1.265625 & 2.53125 \\ 2.025 & 3.0375 \end{bmatrix}$
  - $Pq =$????

TPC

- Considere a matriz $A_{3\times 3} = [a_{ij}]$, em que a_{ij} é a distância entre as localidades i e j, com $i, j = 1, \ldots, 3$. Qual é a relação entre A e A^T?

- Considere a matriz $B_{3\times 3} = [b_{ij}]$, em que b_{ij} é a diferença de altitude entre as localidades i e j, com $i, j = 1, \ldots, 3$. Qual é a relação entre B e B^T?

- Exercício 62 - até ao f)

- Exercício 63

Até sexta