Matemático - 2022/23

Aula 11 Nov

Isabel Martins

Sinopse

1. Cálculo matricial - operações com matrizes (incompleto)
2. Transformações geométricas no plano
3. Transformações geométricas no espaço
4. Para a próxima aula
   - Equações matriciais

Operações algébricas com matrizes

Produto de matrizes

Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas* se

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ colunas de } A = \text{n}^{\text{o}} \text{ linhas de } B$$

Operações algébricas com matrizes

Produto de matrizes

Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas* se

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ colunas de } A = \text{n}^{\text{o}} \text{ linhas de } B$$

Sejam

$$A = [a_{ij}] \qquad \text{do tipo } m \times n$$

$$B = [b_{jk}] \qquad \text{do tipo } n \times p$$

matrizes *encadeadas*

$$AB = C = [c_{ik}] \qquad \text{do tipo } m \times p$$

onde $c_{ik} = (\text{linha } i \text{ de } A) \,|\, (\text{coluna } k \text{ de } B)$

Operações algébricas com matrizes

Ex:

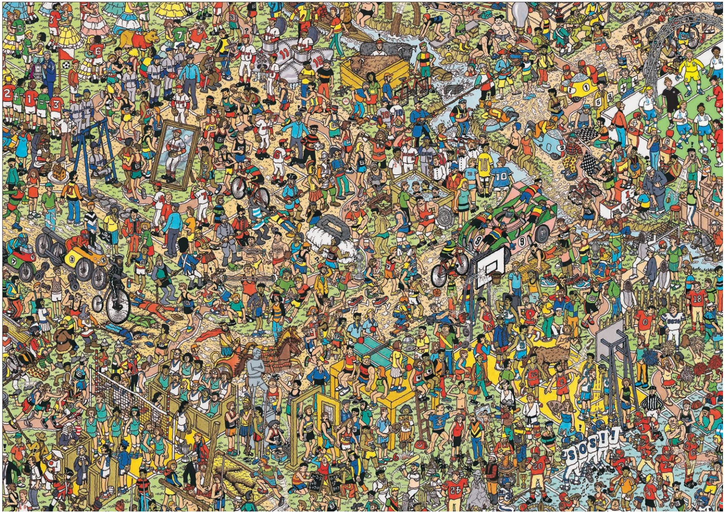
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ \boxed{10 \quad 0 \quad -3 \quad 5} \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} -6 & 14 & 14 \\ -1 & 70 & -26 \\ -103 & 37 & \boxed{-3} \\ -5 & 70 & -10 \\ -29 & 7 & -9 \end{bmatrix}_{5\times 3}$$

$[c_{33} = (10, 0, -3, 5)|(0, -5, 1, 0) = 10 \times 0 + 0 \times (-5) + (-3) \times 1 + 5 \times 0 = -3]$

É mais fácil que

Onde está o Wally?



Operações algébricas com matrizes
Potenciação de matrizes

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n

$$A^k = \begin{cases} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ factores}} & \text{se } k \in \mathbb{N} \\ I_n & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Da aula passada

- Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}],$$

em que p_{ij} é o preço no mercado i do produto j (em euros/embalagem), com $i = 1$ (Algés), 2 (Ajuda), 3 (Restelo) e $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).
Seja o vector

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j],$$

em que q_j é a quantidade do produto j (nº de embalagens) que uma dada pessoa pretende adquirir, com $j = 1$ (sementes de girassol), 2 (sementes de tomilho).

  - Considere que se prevê para o próximo ano um aumento de 2.5% dos preços referidos. Calcule os preços das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) para o próximo ano, por mercado. **R:** $1.025P$

  - Calcule o preço médio das sementes de girassol e de tomilho (em euros/embalagem) nos dois anos referidos, por mercado.
    R: $\frac{1}{2}(P + 1.025P)$

  - Calcule o valor que a pessoa iria gastar este ano, por mercado. **R:** Pq

Da aula passada

- $P = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [p_{ij}]$ e $q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [q_j]$
  - $1.025P = 1.025 \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5375 & 2.05 \\ 1.28125 & 2.5625 \\ 2.05 & 3.075 \end{bmatrix}$
  - $\frac{1}{2}(P + 1.025P) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 1.25 & 2.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5375 & 2.05 \\ 1.28125 & 2.5625 \\ 2.05 & 3.075 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.51875 & 2.025 \\ 1.265625 & 2.53125 \\ 2.025 & 3.0375 \end{bmatrix}$
  - $Pq = \begin{bmatrix} 1.5 \times 2 + 2 \times 3 \\ 1.25 \times 2 + 2.5 \times 3 \\ 2 \times 2 + 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

Praticar

Exercício 62 g) i) k)

Transformações geométricas no plano

Transformações geométricas no plano

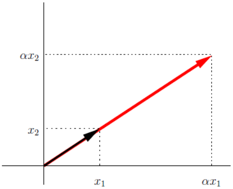
- **Homotetias**

$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ define uma *homotetia* de razão $\alpha > 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha > 1$ a homotetia é uma *dilatação*

Se $\alpha < 1$ a homotetia é uma *contracção*

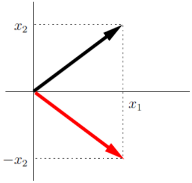


Transformações geométricas no plano

- **Simetrias**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente ao eixo dos xx

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$



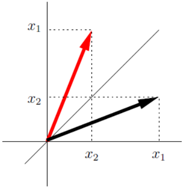
simetria relativamente
ao eixo dos xx

Transformações geométricas no plano

- **Simetrias**

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$



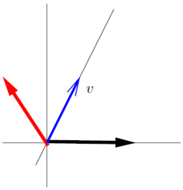
simetria relativamente à
bissectriz dos quadrantes ímpares

Transformações geométricas no plano

- **Simetrias**

Em geral, a matriz A define uma *simetria* relativamente à recta que passa na origem e contém o vector $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq \vec{0}$

$$A = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1 v_2 \\ 2v_1 v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix}$$



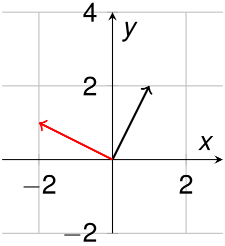
simetria relativamente a
uma reta com vetor diretor v

Transformações geométricas no plano

- **Rotações**

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ define uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$



Transformações geométricas no plano

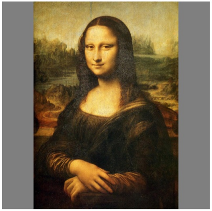
- **Rotações**

Em geral, $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ define uma *rotação* de ângulo θ radianos no sentido anti-horário

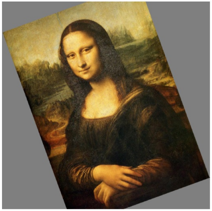
Transformações geométricas no plano

Mona Lisa, L. da Vinci

$$\begin{bmatrix} \cos 1^{o} & -\sin 1^{o} \\ \sin 1^{o} & \cos 1^{o} \end{bmatrix}$$



largura: 400 pixel
altura: 572 pixel



20 aplicações

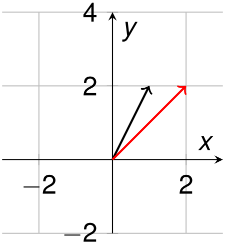
100 aplicações

Transformações geométricas no plano

- **Outras transformações**

$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ define uma transformação de cisalhamento horizontal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0.5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Outras transformações

Auto-retrato, V. Gogh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

largura: 563 pixel
altura: 705 pixel

20 aplicações

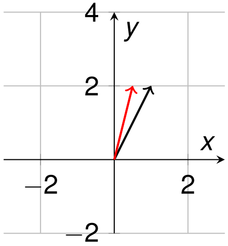
100 aplicações

Transformações geométricas no plano

- **Outras transformações**

$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ define uma transformação de cisalhamento horizontal

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 0.5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

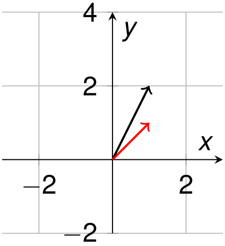


Transformações geométricas no plano

- **Outras transformações**

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0.5x_2 \end{bmatrix}$$



Transformações geométricas no plano

A persistência da memória, S. Dali

$$\begin{bmatrix} \frac{79}{80} & 0 \\ 0 & \frac{39}{40} \end{bmatrix}$$

largura: 580 pixel
altura: 418 pixel

10 aplicações

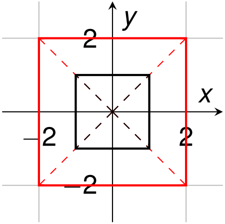
50 aplicações

Transformações geométricas no plano

- **Mais exemplos**

  A matriz
  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
  transforma o quadrado preto no quadrado vermelho

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



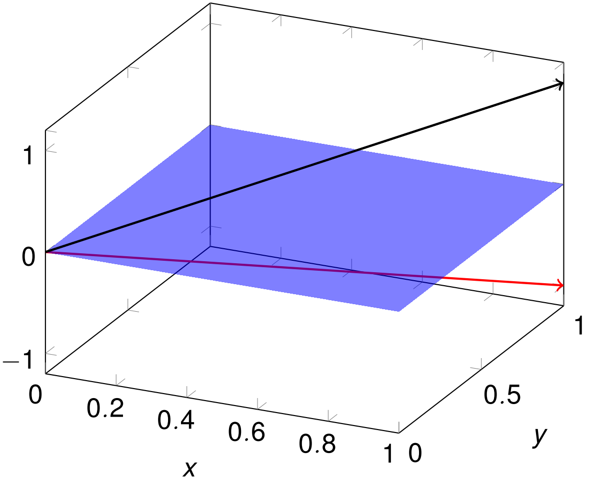
Transformações geométricas no espaço

- **Simetrias**

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente ao plano xOy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço



Para a próxima aula

Para a próxima aula

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$u = (u_1, u_2)$ é solução da <u>equação matricial</u> $Ax = b \Leftrightarrow$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$u = (u_1, u_2)$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

$u = (u_1, u_2)$ é solução do sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & -1 \\ -x_1 & & & = & 1 \end{array} \right.$

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (-1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (-1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (-1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ porque

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u = (-1, 0)$ é solução do sistema linear $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ -x_1 = 1 \end{cases}$

porque

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (-1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

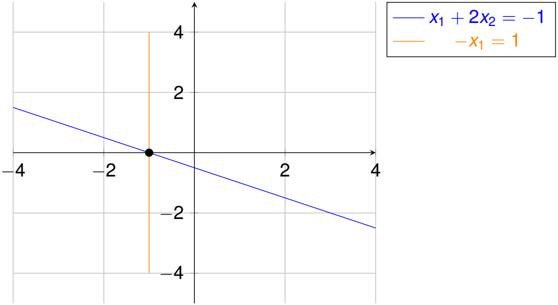
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u = (-1, 0)$ é solução do sistema linear $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ -x_1 = 1 \end{cases}$

porque $\begin{cases} -1 + 2(0) = -1 \\ -(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ 1 = 1 \end{cases}$

Equações matriciais

Interpretação geométrica da equação matricial/sistema linear



Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

Equações matriciais

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

$u = (u_1, u_2, u_3)$ é solução do sistema linear acima

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (2, -1, 0)$ é solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ porque

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (2, -1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (2, -1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u = (2, -1, 0)$ é solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

porque

Equações matriciais

Solução, o que é?

$u = (2, -1, 0)$ é solução da <u>equação matricial</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u = (2, -1, 0)$ é solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\text{porque} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2 & + & 2(-1) & + & 3(0) & = & 0 \\ 2(2) & + & 3(-1) & + & 5(0) & = & 1 \\ 2 & + & (-1) & + & 2(0) & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 1 & = & 1 \\ 1 & = & 1 \end{array} \right.$$

Equações matriciais
Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$, com $x_3 \in \mathbb{R}$, são solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

Equações matriciais

Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$, com $x_3 \in \mathbb{R}$, são solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ porque}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - x_3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ é igual a } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Equações matriciais

Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$ são solução do sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ porque

Equações matriciais

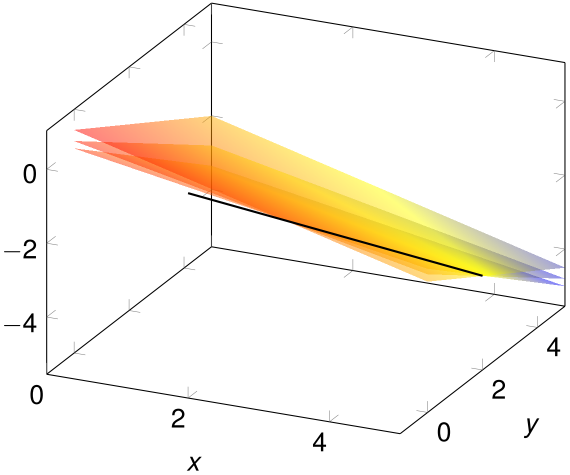
Solução, o que é?

Os vectores da forma $x = (2 - x_3, -1 - x_3, x_3)$ são solução do sistema linear $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ porque

$$\begin{cases} 2 - x_3 + 2(-1 - x_3) + 3(x_3) = 0 \\ 2(2 - x_3) + 3(-1 - x_3) + 5(x_3) = 1 \\ (2 - x_3) + (-1 - x_3) + 2(x_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Equações matriciais

Interpretação geométrica da equação matricial/sistema linear



Equações matriciais
Genericamente

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \text{e} \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução da equação matricial $Ax = b \Leftrightarrow$

$u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema linear acima

TPC + Bons estudos!

Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4.5 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} = [c_{ij}],$$

em que c_{ij} é o custo do item i no fabrico do produto j (em euros/kg de j), com $i = 1$ (matéria-prima), 2 (mão-de-obra e outros) e $j = 1$ (adubo I), 2 (adubo II).

Seja a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1000 & 2000 & 2000 & 3000 \\ 3000 & 1000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} = [p_{jk}],$$

em que p_{jk} é a produção do produto j na estação do ano k (em kg), com $j = 1$ (adubo I), 2 (adubo II) e $k = 1$ (primavera), 2 (verão), 3 (outono), 4 (inverno).

Calcule CP e explique o que representa.

TPC + Bons estudos!

Acabar o Exercício 62

Exercício 64 a)

Crie outra transformação geométrica do triângulo definido no Exercício 66.