INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1º teste de Álgebra Linear

12 de novembro de 2022 - Duração: 1h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[6.25v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \,]$ e $b = (1, \beta, \beta - \alpha)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha \neq -2, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha = 1$ o sistema é PI $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha = -2$ e $\beta = 0$ o sistema é PI.
Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP.

(b) Indique os valores de α para os quais:

i. A é invertível. $\alpha \neq -2, 1$

ii. $\mathcal{N}(A)$ define uma reta de $\mathbb{R}^3$. $\alpha = -2$ ou $\alpha = 1$

iii. $(-2, 2, -2)$ é ortogonal a $\mathcal{C}(A)$. $\alpha = 1$

(c) Considere $\alpha = 0$ e resolva a equação $AX + 4I = 0$. $X = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -8 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(d) No que segue, considere $\alpha = -2$.

i. Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.
$\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \,:\, -2b_1 + 2b_2 + b_3 = 0\}$. Geometricamente representa um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetor normal $(-2, 2, 1)$.

ii. Escreva b como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 para um valor conveniente de β.
$\beta = 0$ e $b = -v_1 + 2v_2 + 0v_3$ (por exemplo).

[2.5v] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $U = \langle (1, -3, 4, 1), (0, 1, -2, 0), (1, -1, 0, 1) \rangle$.

(a) Determine o ângulo entre a primeira e a terceira coluna de A. $\frac{\pi}{3}$.

(b) Determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.
Uma base é, por exemplo, $\{(0, -\frac{1}{2}, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$ e a dimensão é 2.

(c) Mostre que $\mathcal{N}(A) = U$.

[1.25v] 3. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^m$, $w = 3u + 4v$ e $A = [\, u \; v \; w \,]$ tais que $\dim \mathcal{C}(A) = 2$. Indique uma base para $\mathcal{N}(A)$. Por exemplo, $\{(3, 4, -1)\}$.