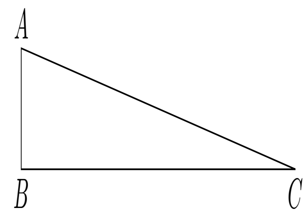
INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA[1]

1º Teste de Matemática 1 - 4 de Novembro de 2022 - Duração 1h30

UMA RESOLUÇÃO

---

1. Considere o triângulo rectângulo ABC em que $\overline{AC} = 25$ e $\overline{BC} = 24$. [1.5v]



Calcule:

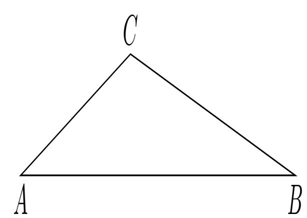
(a) $\overline{AB}$

Como $\hat{B} = 90^o$, o lado posto a $\hat{B}$ chama-se hipotenusa e os outros dois lados catetos. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \iff 25^2 = \overline{AB}^2 + 24^2 \iff \overline{AB}^2 = 49 \iff \overline{AB} = \sqrt{49} = 7$.

(b) $\sin\hat{A}$, $\cos\hat{A}$, $\operatorname{tg}\hat{A}$, $\operatorname{cotg}\hat{A}$, $\sec\hat{A}$ e $\operatorname{cosec}\hat{A}$.

Como ABC é um triângulo rectângulo, podemos definir $\sin\hat{A}$, $\cos\hat{A}$ e tg$\hat{A}$ à custa dos comprimentos do cateto oposto BC, do cateto adjacente AB e da hipotenusa AC: $\sin\hat{A} = \frac{24}{25}$, $\cos\hat{A} = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{24}{7}$. $\operatorname{cotg}\hat{A} = \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{A}} = \frac{7}{24}$, $\sec\hat{A} = \frac{1}{\cos\hat{A}} = \frac{25}{7}$ e $\operatorname{cosec}\hat{A} = \frac{1}{\sin\hat{A}} = \frac{25}{24}$.

2. Considere o triângulo ABC no plano cartesiano tal que $A(4,0)$, $B(19,0)$, $\overline{AC} = 10$ e $\cos\hat{A} = \frac{1}{4}$. [2.5$v$]



Calcule:

(a) $\|\vec{AB}\|$

$\|\vec{AB}\| = \|\overrightarrow{(B-A)}\| = \|(15,0)\| = \sqrt{15^2+0^2} = 15$.

(b) $\overline{BC}$

Pela lei dos cossenos, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}\,\overline{BC}\cos\hat{A} = 10^2 + 15^2 - 2\times 10\times 15\times\frac{1}{4} = 250 \iff \overline{BC} = \sqrt{250}$.

---

[1] O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.

(c) $\vec{AC}|\vec{AB}$.

Pela fórmula que relaciona o cosseno com o produto escalar, $\cos \hat{A} = \dfrac{\vec{AC}|\vec{AB}}{\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|} \iff \vec{AC}|\vec{AB} = \dfrac{1}{4} \times 10 \times 15 = \dfrac{150}{4} = \dfrac{75}{2}$.

(d) $proj_{\vec{AB}}\vec{AC}$

$proj_{\vec{AB}}\vec{AC} = \dfrac{\vec{AB}|\vec{AC}}{\vec{AB}|\vec{AB}}\vec{AB} = \dfrac{\vec{AC}|\vec{AB}}{\vec{AB}|\vec{AB}}\vec{AB} = \dfrac{\frac{75}{2}}{15 \times 15 + 0 \times 0}(15, 0) = (\dfrac{75}{30}, 0) = (\dfrac{15}{6}, 0)$.

(e) as coordenadas do ponto C.

Sendo $C(x, y)$, tal que $x, y > 0$, $A(4.0)$ e $B(19, 0)$, tem-se

$$\left\{\begin{array}{rcl} \|\vec{AC}\| & = & 10 \\ \|\vec{BC}\| & = & \sqrt{250} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \|(x-4, y)\| & = & 10 \\ \|(x-19, y)\| & = & \sqrt{250} \end{array}\right. \iff$$

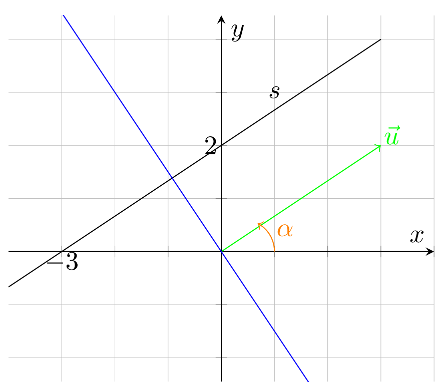
$$\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{(x-4)^2 + y^2} & = & 10 \\ \sqrt{(x-19)^2 + y^2} & = & \sqrt{250} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} (x-4)^2 + y^2 & = & 100 \\ (x-19)^2 + y^2 & = & 250 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & 100 - (x-4)^2 \\ (x-19)^2 + 100 - (x-4)^2 & = & 250 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} - & - & - \\ -30x & = & -195 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & 100 - (6.5-4)^2 \\ x & = & 6.5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & 93.75 \\ - & - & - \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 9.68 \\ x & = & 6.5 \end{array}\right.$$

Assim, $C(6.5, 9.68)$.

3. Considere a recta s da figura e a recta $r : y = -\dfrac{3}{2}x$. [2.5v]



(a) Calcule o declive da recta s e o menor ângulo positivo que s faz com o eixo dos xx. Desenhe este ângulo na figura.

Um vector paralelo à recta s: $u = (0,2) - (-3,0) = (3,2)$. Logo, o declive da recta s é $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, sendo $\alpha = 0.59$ radianos.

(b) Desenhe a recta r e verifique analiticamente que r é perpendicular à recta s.

A recta r passa pelos pontos (0,0) e (2,-3). O vector $v = (2,-3) - (0,0) = (2,-3)$ tem a direcção de r. As restas r e s são perpendiculares porque os vectores com as direcções das rectas são perpendiculares, $u|v = (3,2)|(2,-3) = 0$.

(c) Indique dois vectores da recta r unitários.

O versor do vector v é um vector unitário de r, tal como o seu simétrico. $\operatorname{vers} v = \frac{1}{\|v\|}v = (\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$, pois $\|v\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

O simétrico de $\operatorname{vers} v$ é $-\operatorname{vers} v = (-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.

(d) Considere o vector v, de abcissa $a \neq 0$, pertencente à recta r. Mostre que a distância de v ao eixo dos xx é dada por $\frac{3}{2}|a|$.

Se o vector v pertence à recta r, então $v = (a, -\frac{3}{2}a)$. A distância de v ao eixo dos xx é dada por $d(v,xx) = \|v - proj_{xx}(a, -\frac{3}{2}a)\|$. Escolhe-se um vector não nulo do eixo dos xx. Por exemplo, (1,0).

Então, $proj_{xx}(a, -\frac{3}{2}a) = proj_{(1,0)}(a, -\frac{3}{2}a) = \frac{(1,0)|(a, -\frac{3}{2}a)}{(1,0)|(1,0)}(1,0) = a(1,0) = (a,0)$.

Então, $d(v,xx) = \|v - proj_{xx}(a, -\frac{3}{2}a)\| = \|((a, -\frac{3}{2}a) - (a,0)\| = \|((0, -\frac{3}{2}a)\| = \sqrt{0^2 + (-\frac{3}{2}a)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3}{2}\sqrt{a^2} = \frac{3}{2}|a|$.

4. Considere os planos $r: x+y-z=0$, $s: 3x+2y+z=0$ e $t: 5x+3y+3z=0$ e o vector $b = (1,1,0)$. [2.5v]

(a) Indique um vector não nulo perpendicular ao plano r e um ponto de r.

Vector não nulo $\perp$ a r: $n = (1,1,-1)$ (os coeficientes associados às variáveis); ponto de r: $P(0,0,0)$ (solução da equação).

(b) Calcule a distância do vector b ao plano r.

$d = \|\mathrm{proj}_n b\|$

$\mathrm{proj}_n b = \frac{(1,1-1)|(1,1,0)}{(1,1-1)|(1,1,-1)}(1,1,-1) = \frac{2}{3}(1,1,-1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Logo, $d = \|\mathrm{proj}_n b\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(c) Determine e descreva geometricamente a intersecção dos três planos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ 3x+2y+z &=& 0 \\ 5x+3y+3z &=& 0 \end{array}\right. \underbrace{\iff}_{\substack{Eq2-3Eq1->Eq2 \\ Eq3-5Eq1->Eq3}} \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ -y+4z &=& 0 \\ -2y+8z &=& 0 \end{array}\right. \underbrace{\iff}_{Eq3-2Eq2->Eq3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ -y+4z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \underbrace{\iff}_{Eq1+Eq2->Eq1} \left\{\begin{array}{rcl} x \quad +3z &=& 0 \\ -y+4z &=& 0 \end{array}\right. \underbrace{\iff}_{Eq2(-1)->Eq2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x \quad +3z &=& 0 \\ y-4z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3z \\ y &=& 4z \\ z &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$$

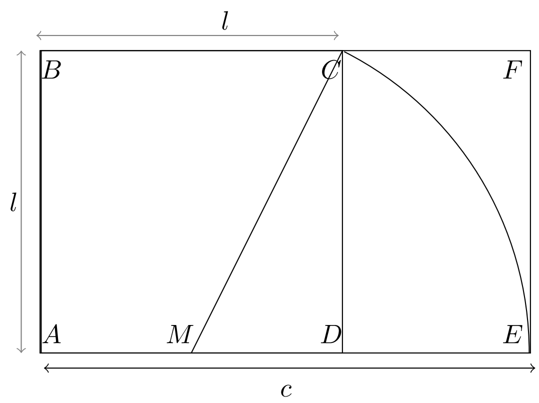
$$CS = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left|\begin{array}{rcl} x &=& -3z \\ y &=& 4z \\ z &\in& \mathbb{R} \end{array}\right. \}$$

Os dois planos de $\mathbb{R}^3$, $x+3z=0$ e $y-4z=0$, são concorrentes, porque os vectores perpendiculares, (1,0,3) e (0,1,-4), não são paralelos. Logo, a intersecção dos dois planos é uma recta. Como o sistema com estes dois planos é equivalente ao primeiro sistema, a intersecção dos três planos é a mesma recta. É fácil de tirar dois pontos da recta, basta ir ao CS. Por exemplo, (0,0,0) e (-3,4,1) são soluções do sistema. Assim, podemos dizer que a intersecção dos três planos é a recta que passa nos pontos (0,0,0) e (-3,4,1).

5. Um rectângulo é um rectângulo de ouro se a razão entre o comprimento e a largura é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o número de ouro ϕ. A partir do quadrado $ABCD$ da figura obtém-se o rectângulo de ouro $ABFE$ da seguinte forma:

[1v]

- centrando um compasso em M, o ponto médio do segmento AD
- traçando com o compasso um arco de circunferência com abertura MC, começando no ponto C e terminando no ponto E, a intersecção do arco com o prolongamento de AD.



Mostre que o rectângulo $ABFE$ é um rectângulo de ouro.

Temos de mostrar que $\frac{c}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$.

$c = \overline{AM} + \overline{MC} = \dfrac{l}{2} + \overline{MC}$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{MC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{MD}^2 = l^2 + (\frac{l}{2})^2 = \frac{5}{4}l^2 \iff \overline{MC} = \sqrt{\frac{5}{4}l^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\sqrt{l^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}|l| \underbrace{=}_{l \geq 0} \frac{\sqrt{5}}{2}l$.

Assim, $c = \dfrac{l}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}l = (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})l$.

Logo, $\dfrac{c}{l} = \dfrac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})l}{l} = (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}) = \phi$.