Programação linear - Resolução gráfica

Isabel Martins

ISA - Matemática I - 2022/2023

Manter o rio limpo

O problema

Uma fábrica de celulose produz pastas de papel mecânica e química e, durante o processo de produção, polui o rio onde derrama as suas águas residuais. Os donos gostariam de minimizar a poluição, mantendo pelo menos 300 pessoas empregadas na fábrica e gerando pelo menos 40000 € de receitas por dia.

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)
- Tanto a pasta mecânica como a pasta química requerem o trabalho de 1 trabalhador por cerca de 1 dia, ou 1 dia de trabalho (dt), por tonelada produzida

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)
- Tanto a pasta mecânica como a pasta química requerem o trabalho de 1 trabalhador por cerca de 1 dia, ou 1 dia de trabalho (dt), por tonelada produzida
- A poluição é medida pela carência bioquímica de oxigénio (CBO). 1 tonelada de pasta mecânica produz 1 unidade de CBO, 1 tonelada de pasta química produz 1.5 unidades

O problema

- A capacidade da fábrica é de 300 toneladas por dia para fazer pasta mecânica e 200 toneladas por dia para fazer pasta química (a linha da pasta mecânica não pode ser usada para fazer pasta química e vice-versa)
- Tanto a pasta mecânica como a pasta química requerem o trabalho de 1 trabalhador por cerca de 1 dia, ou 1 dia de trabalho (dt), por tonelada produzida
- A poluição é medida pela carência bioquímica de oxigénio (CBO). 1 tonelada de pasta mecânica produz 1 unidade de CBO, 1 tonelada de pasta química produz 1.5 unidades
- A pasta química é vendida a 200 €/t, a pasta mecânica a 100 €/t.

Variáveis de decisão e formulação

Variáveis de decisão e formulação

x_1 - Quantidade de pasta mecânica produzida (t/dia)

x_2 - Quantidade de pasta química produzida (t/dia)

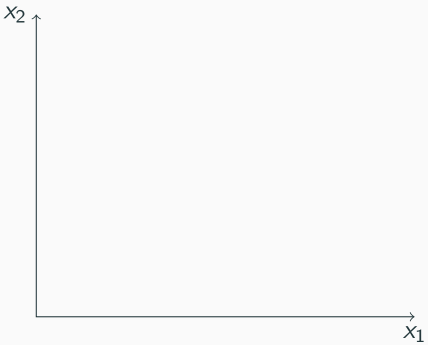
Variáveis de decisão e formulação

x_1 - Quantidade de pasta mecânica produzida (t/dia)

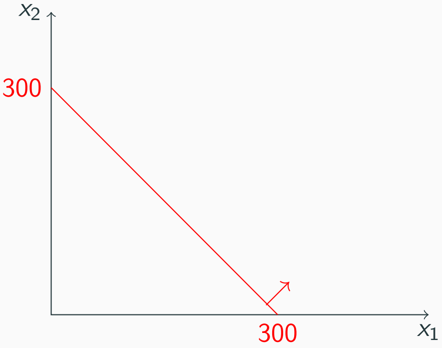
x_2 - Quantidade de pasta química produzida (t/dia)

$$
\begin{aligned}
& \min\ Z = x_1 + 1.5x_2 \quad \text{unidades de CBO por dia} && (1)\\
& \text{sujeito a} && \\
& x_1 + x_2 \geq 300 \quad \text{trabalhadores empregues} && (2)\\
& 100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \quad \text{receita, euros/dia} && (3)\\
& x_1 \leq 300 \quad \text{capacidade da pasta mecânica, t/dia} && (4)\\
& x_2 \leq 200 \quad \text{capacidade da pasta química, t/dia} && (5)\\
& x_1, x_2 \geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

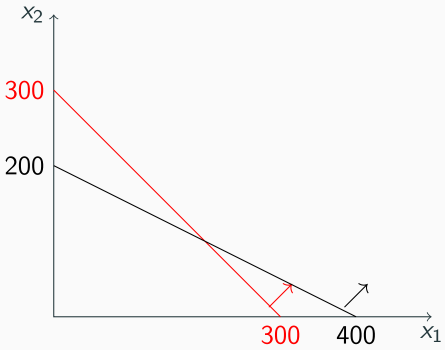
Região admissível



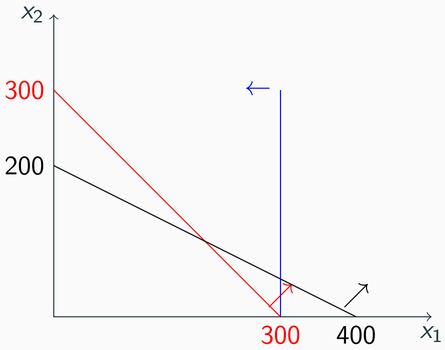
Região admissível



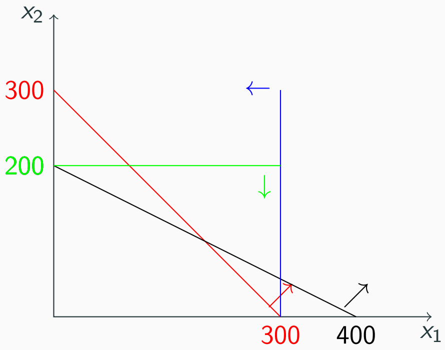
Região admissível



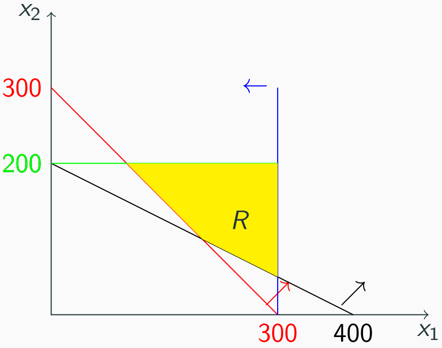
Região admissível



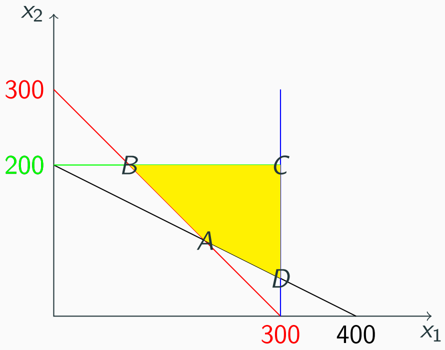
Região admissível



Região admissível

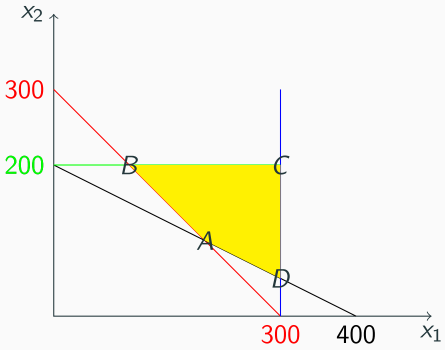


Região admissível e vértices



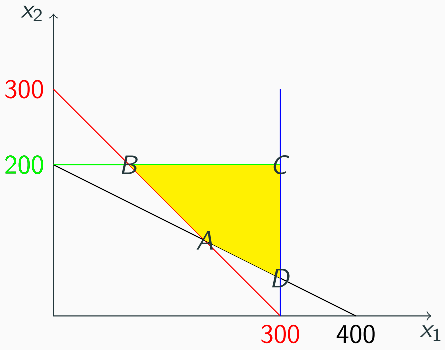
$$A = \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 300 \\ 100x_1 + 200x_2 & = & 40000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 200 \\ x_2 & = & 100 \end{cases}$$

Região admissível e vértices



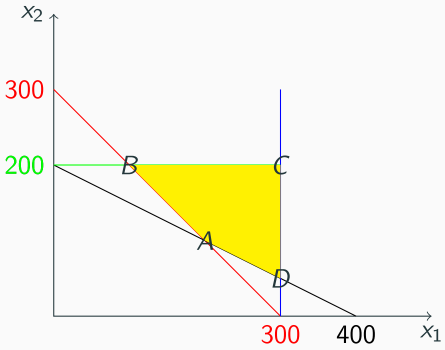
$$B = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_2 = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 200 \end{cases}$$

Região admissível e vértices



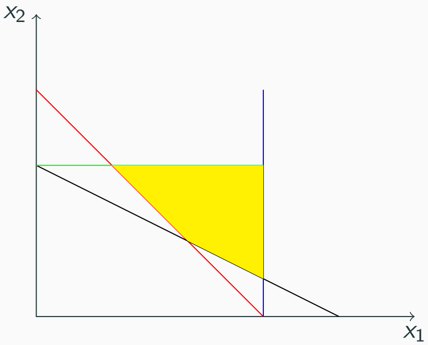
$$C = \begin{cases} x_2 = 200 \\ x_1 = 300 \end{cases}$$

Região admissível e vértices



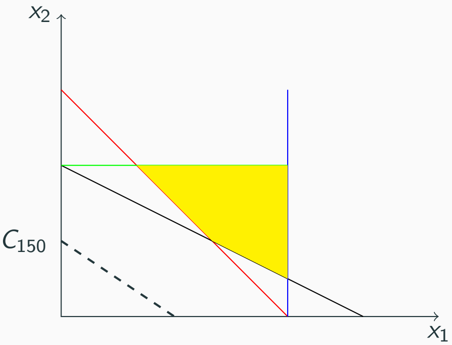
$$D = \begin{cases} x_1 & = & 300 \\ 100x_1 + 200x_2 & = & 40000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 300 \\ x_2 & = & 50 \end{cases}$$

Região admissível e curvas de nível



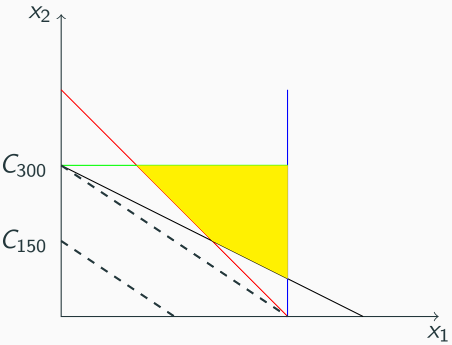
Curva de nível k, $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



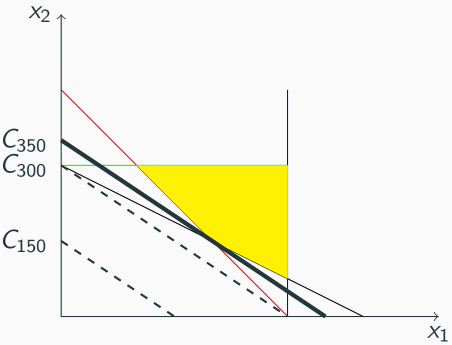
Curva de nível k, $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



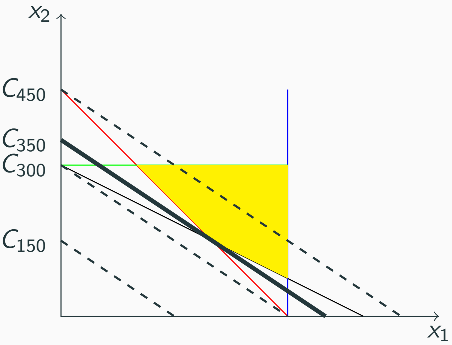
Curva de nível k, $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



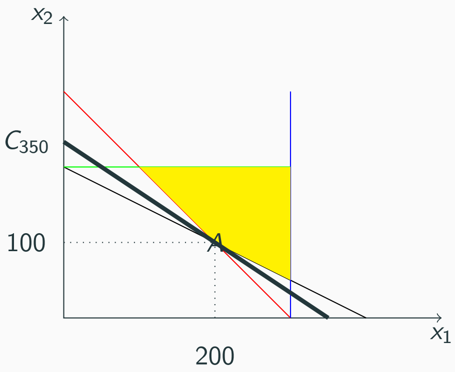
Curva de nível k, $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Região admissível e curvas de nível



Curva de nível k, $C_k = \{(x_1, x_2) : Z = k\} = \{(x_1, x_2) : x_1 + 1.5x_2 = k\}$

Solução ótima



Optimal solution $A = (200, 100) \longrightarrow Z^* = 350$ CBO

Região admissível limitada e uma solução óptima

Região admissível limitada e uma solução óptima

$$\min\ Z = x_1 + 1.5x_2 \tag{7}$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{8}$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{9}$$

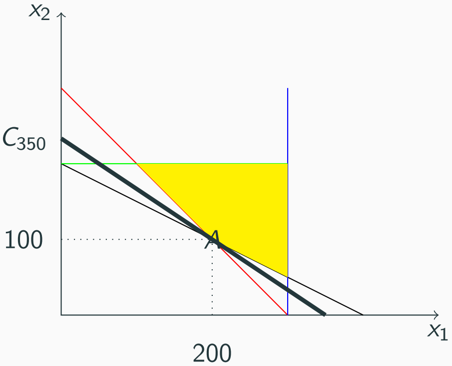
$$x_1 \leq 300 \tag{10}$$

$$x_2 \leq 200 \tag{11}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{12}$$

Região admissível limitada e uma solução óptima

$\min Z = x_1 + 1.5x_2$



Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min\ Z = x_1 + 2x_2 \tag{13}$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{14}$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{15}$$

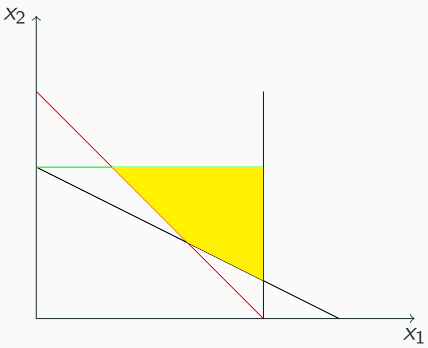
$$x_1 \leq 300 \tag{16}$$

$$x_2 \leq 200 \tag{17}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{18}$$

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

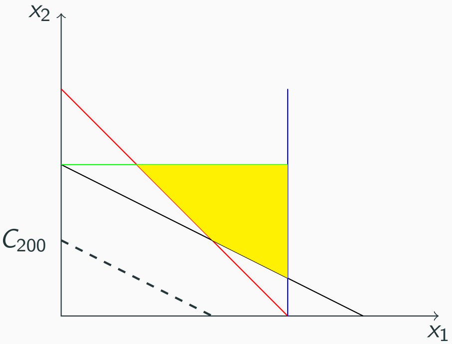
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

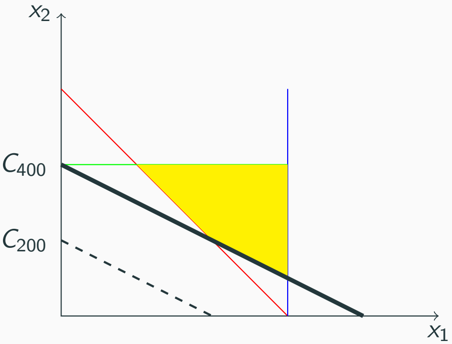
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

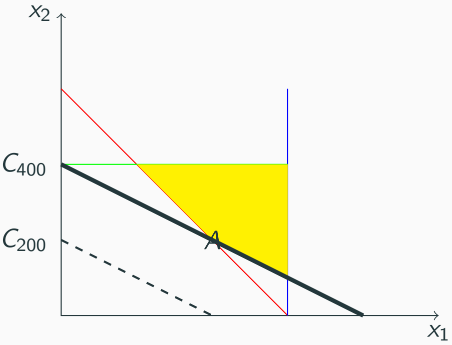
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

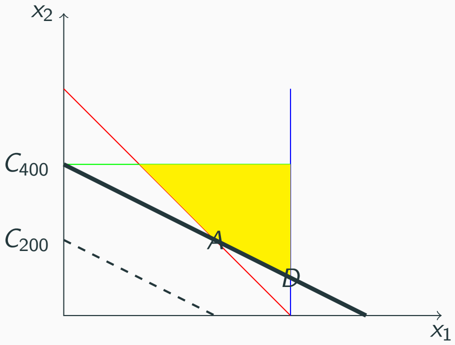
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível limitada e soluções óptimas alternativas

$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$ CBO

Região admissível não limitada e uma solução óptima

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$$\min \; Z = x_1 + 1.5x_2 \tag{19}$$

$$\textit{subject to}$$

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{20}$$

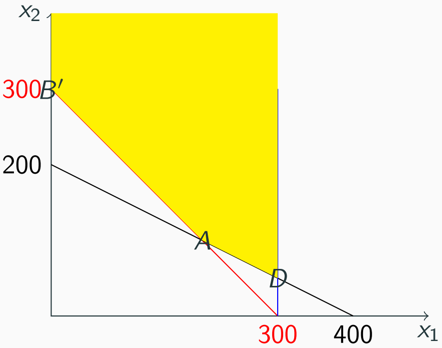
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{21}$$

$$x_1 \leq 300 \tag{22}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{23}$$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$\min Z = x_1 + 1.5x_2$

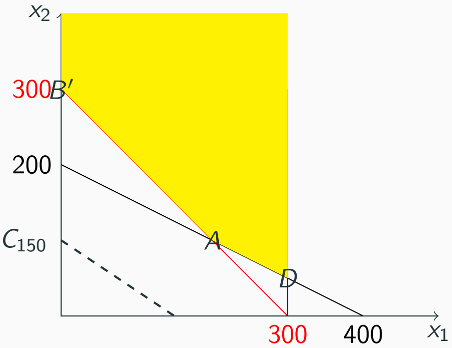


$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 300 \\ x_1 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \longrightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$\min Z = x_1 + 1.5x_2$

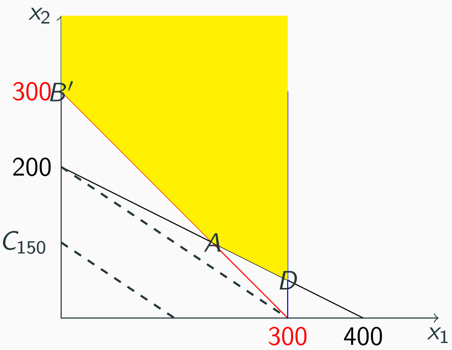


$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \longrightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$\min Z = x_1 + 1.5x_2$

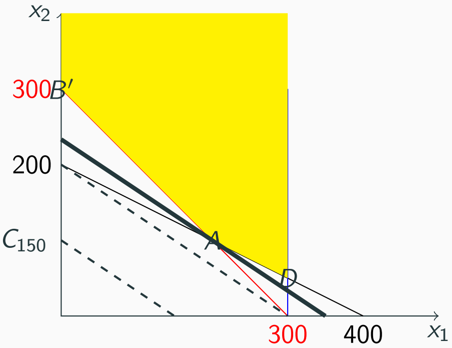


$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \longrightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e uma solução óptima

$\min Z = x_1 + 1.5x_2$



$$B' = \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Optimal solution $A = (200, 100) \longrightarrow Z^* = 350$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min\ Z = x_1 + 2x_2 \tag{24}$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{25}$$

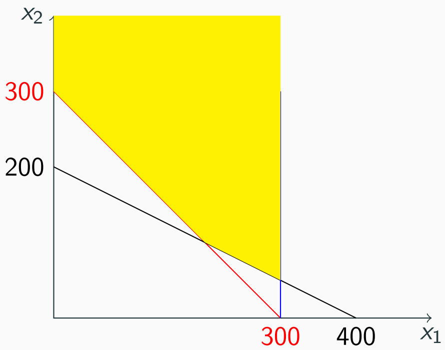
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{26}$$

$$x_1 \leq 300 \tag{27}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{28}$$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

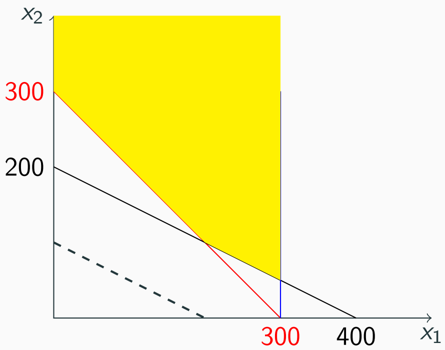
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

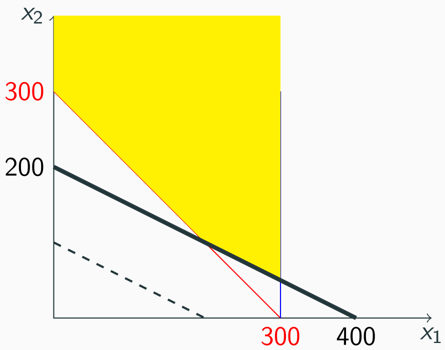
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

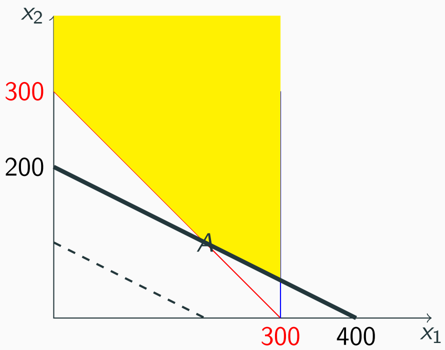
$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

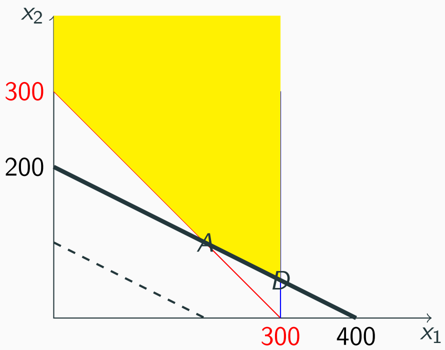
min $Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

$\min Z = x_1 + 2x_2$



Soluções óptimas $[A, D] \longrightarrow Z^* = 400$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

$$\min\ Z = x_1 \tag{29}$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{30}$$

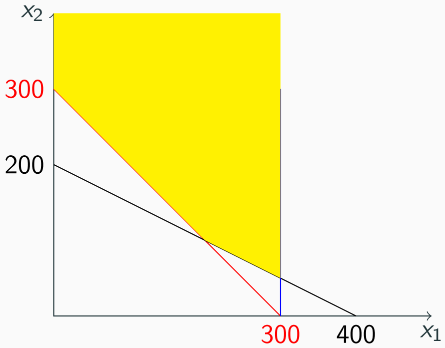
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{31}$$

$$x_1 \leq 300 \tag{32}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{33}$$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

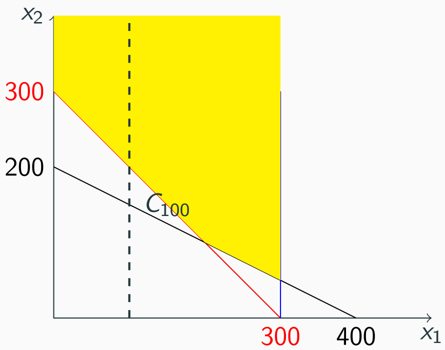
$\min Z = x_1$



Soluções óptimas $[B, +\infty[\longrightarrow Z^* = 0$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

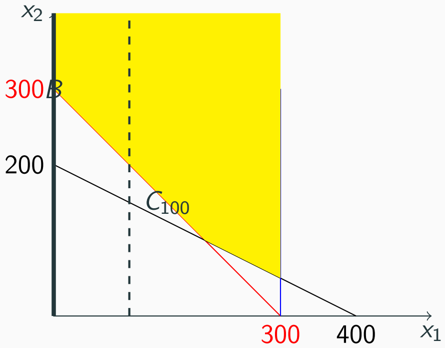
$\min Z = x_1$



Soluções óptimas $[B, +\infty[\longrightarrow Z^* = 0$

Região admissível não limitada e soluções óptimas alternativas

$\min Z = x_1$



Soluções óptimas $[B, +\infty[\longrightarrow Z^* = 0$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

$$\max\ Z = x_1 + 1.5x_2 \tag{34}$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{35}$$

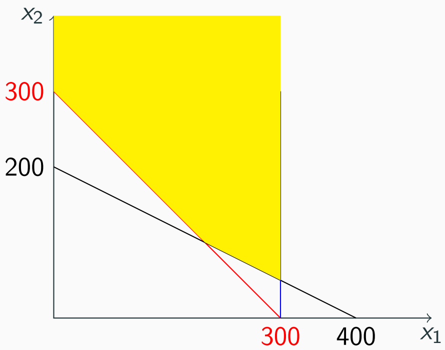
$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{36}$$

$$x_1 \leq 300 \tag{37}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{38}$$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

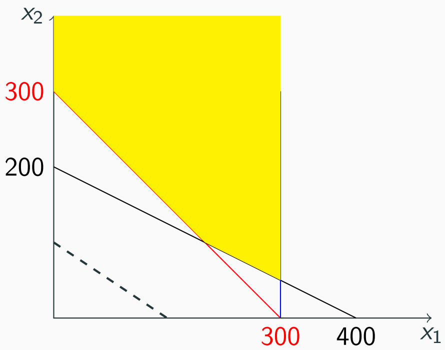
$\max Z = x_1 + 1.5x_2$



$\nexists$ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\longrightarrow Z^* = +\infty$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

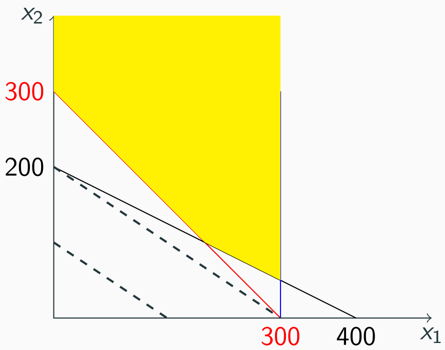
$\max Z = x_1 + 1.5x_2$



$\nexists$ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\longrightarrow Z^* = +\infty$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

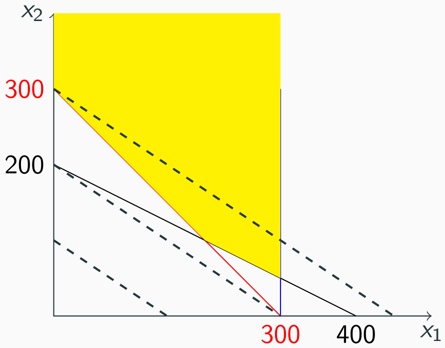
$\max Z = x_1 + 1.5x_2$



$\nexists$ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\longrightarrow Z^* = +\infty$

Região admissível não limitada e solução óptima não limitada

$\max Z = x_1 + 1.5x_2$



$\nexists$ soluções óptimas (solução óptima não limitada) $\longrightarrow Z^* = +\infty$

Problema impossível

Problema impossível

$$\min\ Z = x_1 + 1.5x_2 \tag{39}$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 300 \tag{40}$$

$$100x_1 + 200x_2 \geq 40000 \tag{41}$$

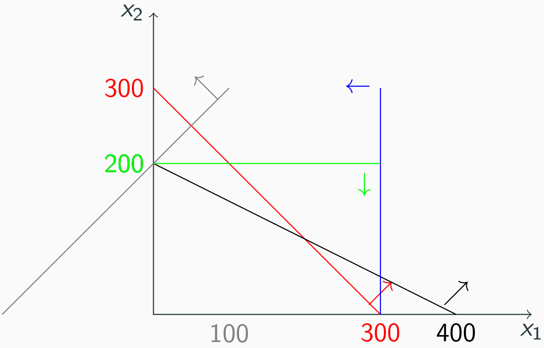
$$x_1 \leq 300 \tag{42}$$

$$x_2 \leq 200 \tag{43}$$

$$-100x_1 + 100x_2 \geq 20000 \tag{44}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{45}$$

Problema impossível



Resumo

Resumo

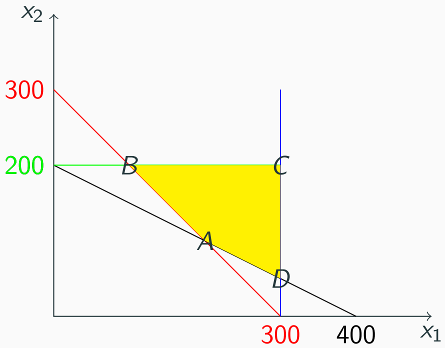
$$
\text{Região admissível de um PPL}
\begin{cases}
\text{limitada} & \begin{cases} \text{uma solução óptima} \\ \text{soluções óptimas alternativas } (\#\infty) \end{cases} \\[2ex]
\text{não limitada} & \begin{cases} \text{uma solução óptima} \\ \text{soluções óptimas alternativas } (\#\infty) \\ \nexists \text{ solução óptima} \end{cases} \\[2ex]
\text{empty} & \begin{cases} \nexists \text{ soluções} \end{cases}
\end{cases}
$$

Resumo

Se a região admissível de um problema de PL é limitada (e não vazia), então existe um vértice da região admissível que é solução óptima do problema.

Voltando ao ”Manter o rio limpo”

Região admissível e vértices



Vértice (x_1, x_2)	$Z = x_1 + 1.5x_2$
A (200,100)	350 $\leftarrow$
B (100,200)	400
C (300,200)	600
D (300,50)	375

TPC

- Exercícios 27 - 2, 3

References

- J. Buongiorno, J.K. Gilless. 2003 (1ª edição). *Decision Methods for Forest Resource Management*, Academic Press.