INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA[1]

2º Teste de Matemática 1 - 14 de Dezembro de 2022 - Duração 1h30

UMA RESOLUÇÃO

---

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

em que a_{ij} é o nº de árvores da espécie j que um arquitecto paisagista pretende adquirir para o espaço verde i, com $j = 1$ (oliveira), 2 (laranjeira) e $i = 1$ (espaço verde E_1), 2 (espaço verde E_2), 3 (espaço verde E_3). Seja a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 85 & 90 & 92 \\ 40 & 45 & 35 \end{bmatrix} = [p_{kl}],$$

em que p_{kl} é o preço (em €) de uma árvore da espécie k no horto l, com $k = 1$ (oliveira), 2 (laranjeira) e $l = 1$ (horto H_1), 2 (horto H_2), 3 (horto H_3).

Calcule AP e interprete o resultado. Averigue se A e P são permutáveis. [1.5v]

Resolução:

$$AP = \begin{bmatrix} 295 & 315 & 311 \\ 370 & 405 & 359 \\ 160 & 180 & 140 \end{bmatrix}.$$

O elemento da linha 1 e da coluna 1 (295) resulta do seguinte cálculo: $3 \times 85 + 1 \times 40$. Ou seja, é o que o arquitecto paisagista gastará para o espaço verde E_1 se escolher fazer as aquisições no horto H_1. O elemento da linha 1 e da coluna 2 (315) resulta do seguinte cálculo: $3 \times 90 + 1 \times 45$. Ou seja, é o que o arquitecto paisagista gastará para o espaço verde E_1 se escolher fazer as aquisições no horto H_2. O elemento da linha 2 e da coluna 1 (370) resulta do seguinte cálculo: $2 \times 85 + 5 \times 40$. Ou seja, é o que o arquitecto paisagista gastará para o espaço verde E_2 se escolher fazer as aquisições no horto H_1. E, assim, sucessivamente. Para descrever todas as entradas de forma sucinta, podemos fazer assim:

$AP = [g_{il}]$, em que g_{il} é o que o arquitecto paisagista gastará para o espaço verde i se escolher fazer as aquisições no horto l, com $i = 1$ (espaço verde E_1), 2 (espaço verde E_2), 3 (espaço verde E_3) e $l = 1$ (horto H_1), 2 (horto H_2), 3 (horto H_3).
A e P não são permutáveis porque PA é uma matriz do tipo 2×2 e, portanto, não é igual a AP.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e os vectores $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. [3.5$v$]

---

[1] O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de α, β e γ.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -1 & 3 & \beta \\ 4 & 1 & 5 & \gamma \end{array}\right] \underset{\substack{L2-2L1\to L2 \\ L3-4L1\to L3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -3 & 1 & \beta-2\alpha \\ 0 & -3 & 1 & \gamma-4\alpha \end{array}\right] \underset{L3-L2\to L3}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -3 & 1 & \beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2\alpha-\beta \end{array}\right]$$

Quando $\gamma - 2\alpha - \beta = 0$, o sistema é possível (não tem condições impossíveis) e indeterminado (tem variável livre). Quando $\gamma - 2\alpha - \beta \neq 0$, o sistema é impossível (tem uma condição impossível).

(b) Para $\alpha = \beta = \gamma = 0$, resolva o sistema $Ax = b$ e interprete geometricamente o conjunto de soluções.

Resolução:

Substituindo os valores de α, β e γ na matriz em escada obtida, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{L2}{-3}\to L2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L1-L2\to L1}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$CS = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left| \begin{array}{l} x_1 = -\frac{4}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

No final, acabamos por ter a intersecção de 2 planos concorrentes, $x_1 + \dfrac{4}{3}x_3 = 0$ e $x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$, um perpendicular ao vector $(1, 0, \dfrac{4}{3})$, e o outro perpendicular ao vector $(0, 1, -\dfrac{1}{3})$. Estes planos são concorrentes e, portanto, o CS é uma recta, é a recta que passa nos pontos, por exemplo, (0,0,0) ($x_3 = 0$) e (-4,1,3) ($x_3 = 3$).

(c) Será que A é invertível?

Resolução:

Aproveitando a matriz em escada $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtida, podemos concluir que A não é invertível porque A' tem linha nula.

(d) Indique uma matriz simétrica C tal que $C + C^T = A + A^T$.

Resolução: $C + C^T = A + A^T \underset{C=C^T}{\Leftrightarrow} C + C = A + A^T \Leftrightarrow 2C = A + A^T \Leftrightarrow C = \dfrac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e a sua inversa e os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ da figura. Seleccione a matriz que transforma o quadrado $ABCD$ no quadrado $EFGH$ e a matriz que transforma o quadrado $EFGH$ no quadrado $ABCD$. [1.0v]

Resolução:

Vamos calcular M^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{L1}{2} \to L1 \\ \frac{L2}{2} \to L2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

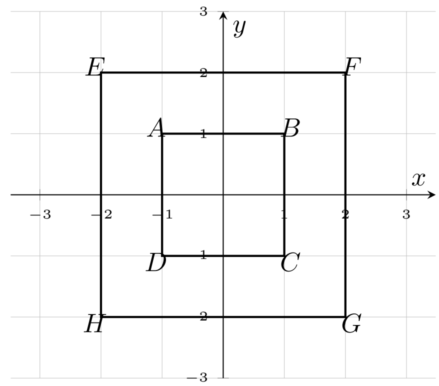
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

M amplia o quadrado $ABCD$ no quadrado $EFGH$:

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ (As colunas da 2ª matriz são os vértices A, B, C e D e as colunas da 3ª matriz são os vértices E, F, G e H).

M^{-1} reduz o quadrado $EFGH$ no quadrado $ABCD$:

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (As colunas da 2ª matriz são os vértices E, F, G e H e as colunas da 3ª matriz são os vértices A, B, C e D).



4. Seja A uma matriz quadrada tal que $A = AA^T$. Mostre que: [1.0v]

   (a) A é simétrica;

   Resolução:

   A é simétrica se $A = A^T$. Vamos ver como é A^T: $A^T = (AA^T)^T \underset{*}{=} (A^T)^T A^T = AA^T = A$. Em * aplicámos a seguinte propriedade: a transposta do produto de matrizes é o produto das matrizes transpostas por ordem contrária.

   (b) $A = A^2$.

   Resolução:

   Como A é simétrica, $A = A^T$. Logo $A = AA^T = AA = A^2$.

Responda ou à questão 5 ou à questão 6.

5. Uma adega produz duas variedades de vinho branco, meio-seco (M) e seco (S). A venda de 1 litro de vinho rende 1 euro se for do tipo M e 0.8 euros se for do tipo S. Para produzir 1 litro de vinho do tipo M são necessárias 1.6 kg de uvas, 0.2 kg de açúcar e 0.2 medidas de extracto. Para produzir 1 litro de vinho do tipo S utilizam-se 2 kg de uvas, 0.3 kg de açúcar e 0.1 medidas de extracto. A adega dispõe de 70 kg de uvas, 8 kg de açúcar e 6 medidas de extracto. Pretende determinar-se um plano de produção de vinho branco que maximize a receita da venda (assumindo que todo o vinho produzido é vendido). Formule o problema em programação linear, atribuindo significado às variáveis. [3.0v]

   Resolução:

   Variáveis de decisão:

   x - quantidade de vinho meio seco produzido (l)

   y - quantidade de vinho seco produzido (l)

$$\max\ Z = x + 0.8y \tag{1}$$
s.a
$$1.6x + 2y \leq 70 \tag{2}$$
$$0.2x + 0.3y \leq 8 \tag{3}$$
$$0.2x + 0.1y \leq 6 \tag{4}$$
$$x, y \geq 0. \tag{5}$$

A expressão em (1) é a receita total. As restrições (2), (3) e (4) limitam as quantidades de uva, açúcar e extracto usados às quantidades disponíveis, respectivamente. E a restrição (5) descreve a natureza das variáveis.

6. Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{llrl}
\min & z = 20x + 15y & & \\
\text{s.a.} & x + y & \geq & 100 \\
 & 3x + 2y & \geq & 250 \\
 & y & \leq & 90 \\
 & x & \leq & 100 \\
 & x, \quad y & \geq & 0.
\end{array}$$

[3.0v]

(a) Represente graficamente a região admissível.

Resolução:

$x + y = 100$ é a recta que passa nos pontos

x	y
0	100
100	0

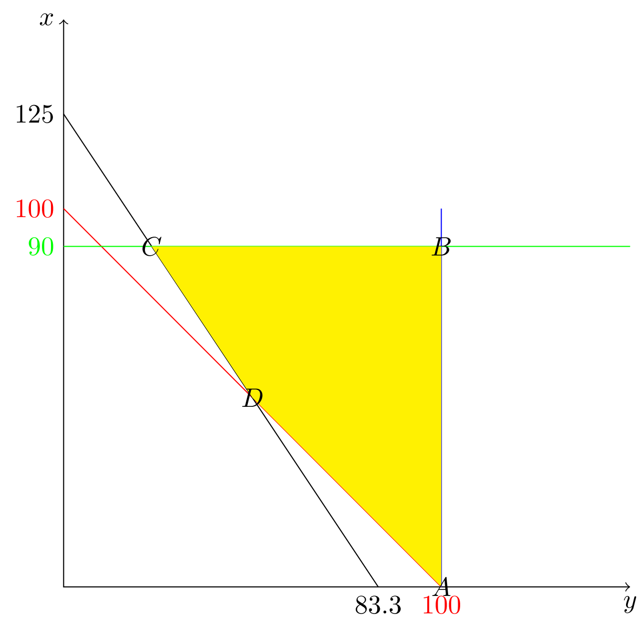
$3x + 2y = 250$ é a recta que passa nos pontos

x	y
0	125
83.3	0

$y = 90$ é a recta horizontal que passa no ponto (0,90).

$x = 100$ é a recta vertical que passa no ponto (100,0).

A região admissível é a região amarela da figura



Os vértices são

Vértice	(x, y)
A	(100,0)
B	(100,90)
C	(23.3,90)
D	(50,50)

em que C é a solução do sistema $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 90 \\ 3x+2y & = & 250 \end{array}\right.$ e D é a solução do sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 100 \\ 3x+2y & = & 250 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 90 \\ 3x+2y & = & 250 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 90 \\ 3x+2(90) & = & 250 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 90 \\ 3x & = & 70 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 90 \\ x & = & 23.3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 100 \\ 3x+2y & = & 250 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 100-x \\ 3x+2(100-x) & = & 250 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 100-x \\ 3x+200-2x & = & 250 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 100-x \\ x & = & 50 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 50 \\ x & = & 50 \end{array}\right. .$$

(b) Assinale graficamente o conjunto das soluções admissíveis com o valor da função objectivo inferior ou igual a 2250.

Resolução:

O conjunto das soluções admissíveis com o valor da função objectivo igual a 2250 é o segmento a preto:

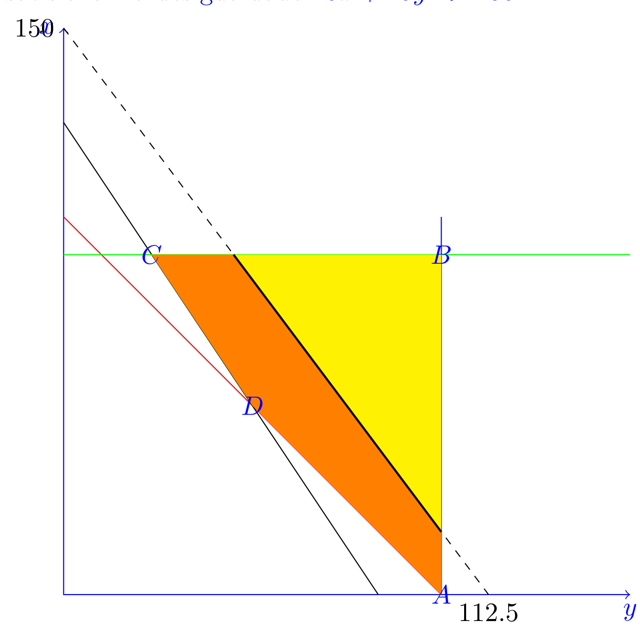
$C_{2250} = \{(x, y) \in$ região admissível : $20x + 15y = 2250\}$

$20x + 15y = 2250$ é a recta que passa nos pontos

x	y
0	150
112.5	0

Da recta seleccionamos apenas a parte que está na região admissível.

O conjunto das soluções admissíveis com o valor da função objectivo inferior a 2250 está assinalado a laranja. Basta ver que o vértice A, por exemplo, satisfaz a desigualdade $20x + 15y < 2250$, pois $20(100) + 15(0) < 2250$. Portanto, A e todos os pontos da região admissível do mesmo lado que A em relação à recta $20x + 15y = 2250$ satisfazem a desigualdade $20x + 15y < 2250$.



(c) Determine uma solução óptima e indique o correspondente valor da função objectivo.

Resolução:

Vértice (x, y)	$Z = 20x + 15y$
A (100,0)	2000
B (100,90)	3350
C (23.3,90)	1816
D (50,50)	1750 $\leftarrow$

Se a região admissível de um problema de PL é limitada (e não vazia), então existe um vértice da região admissível que é solução óptima do problema. Podemos usar este resultado aqui. Assim, a solução ótima é o vértice D com o valor da função objectivo igual a 1750.