INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º Teste de Álgebra Linear

26 de janeiro de 2022 - Duração: 1h30

Guarde todos os equipamentos eletrônicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

[4.5v] 1. Considere $V = \langle (2, 1, 1, -2), (1, 0, 1, -1), (1, -1, 2, -1) \rangle$, $b = (2, -3, 0, -2)$ e $c = (1, 2, 2, 3)$.

a) Justifique que $c \in V^\perp$.

b) Determine uma base e a dimensão de $V^\perp$.

Uma possível base é $\{(-1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ e a dimensão é 2.

c) Indique o vetor de V a menor distância de b e o valor dessa distância.

O vetor de V a menor distância de b é $(1, -1, 2, -1)$ e o valor dessa distância é $\sqrt{10}$.

d) Determine um vetor $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $\text{proj}_{V^\perp}(u) = c$ e $d(u, V^\perp) = d(b, V^\perp)$.

Por exemplo, o vetor $(2, 1, 4, 2)$.

[3v] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $\det(2(A - I)^{10})$.

8

b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

Os valores próprios de A são 0 e 2, com multiplicidades algébricas 1 e 2, respectivamente, tendo ambos multiplicidade geométrica 1.

c) Um conjunto linearmente independente de vetores próprios de A contém no máximo quanto vetores?

2

[1v] 3. Os resíduos produzidos por duas fábricas de uma mesma empresa, F_1 e F_2 , contêm dois tipos de poluentes P_1 e P_2 . Normas ambientais exigem que as quantidades de P_1 e P_2 sejam reduzidas em pelo menos 30 t e 40 t, respetivamente. Sabe-se que processar 1 tonelada de resíduos em F_1 reduz em 0.10 t a quantidade de P_1 e em 0.45 t a quantidade de P_2 . Por outro lado, processar 1 tonelada de resíduos em F_2 reduz em 0.20 t a quantidade de P_1 e em 0.25 t a quantidade de P_2 . A capacidade da fábrica F_2 permite processar até 100 t de resíduos. Os custos de processar uma tonelada de resíduos na fábrica F_1 e F_2 são respetivamente de 15 e 10 euros. Pretende-se determinar a quantidade de resíduos a processar em cada fábrica por forma a minimizar os custos de processamento.

Formule o problema em termos de programação linear, atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{ll} \min & 15x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a} & 0.1 x_1 + 0.2 x_2 \geq 30 \\ & 0.45 x_1 + 0.25 x_2 \geq 40 \\ & x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

em que x_1 e x_2 são as quantidades de resíduos (em ton.) a processar nas fábricas F_1 e F_2 , respetivamente.

[1.5v] 4. Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 - f_1 = 0 \\ & x_2 + x_3 + f_2 = 2 \\ & -x_1 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, f_1, f_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Verifique que a solução em que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ corresponde a um vértice da região admissível.