INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

4 de janeiro de 2023 - Duração: 2h

> Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
> O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[8.25v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = [\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

ii) $b \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

iii) $\mathcal{N}(A)^\perp$ define um plano de $\mathbb{R}^3$.

c) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e determine o ângulo entre b e v_2.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = -1$.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

e) Escreva o vetor $(-2, 5, 5)$ como combinação linear dos vetores de uma base de $\mathcal{C}(A)$.

f) Mostre que $\mathcal{C}(A) = \langle (-2, 5, 5), (-2, 2, 4) \rangle$.

[4v] **2.** Considere $U = \langle (1, 0, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 3, -1, -2) \rangle$ e $b = (-1, 0, 1, 2)$.

a) Determine uma base ortogonal para U.

b) Calcule $\text{proj}_U(b)$.

c) Mostre que $\text{proj}_U(b + u) = \text{proj}_U(b) + u$ para todo o $u \in U$.

[4v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o paralelipípedo definido por u_1, u_2 e u_3 tem volume 4.

No que se segue considere $\alpha = 3$.

b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Determine um vetor próprio unitário de A.

d) Existirá uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A ?

Continua no verso !

[2.5v] **4.** Uma adega pretende plantar vinha das castas A, B, e C para produzir vinho. A produção média anual e o valor da venda de vinho de cada casta encontram-se na tabela seguinte:

	Produção (nº pipas/ha)	Valor da venda (€/pipa)
Casta A	20	500
Casta B	20	800
Casta C	18	500

Sabe-se que a área total a destinar à produção de vinho e a área a destinar à produção de vinho da casta C não podem ultrapassar, respetivamente, 1100 ha e 450 ha e que pelo menos um hectare deve ser destinado à casta B por cada 2 hectares que são destinados à casta C. A adega pretende determinar a área a destinar a cada casta de modo a maximizar a receita anual.

a) Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

b) Escreva o problema na forma *standard*.

c) Verifique que a opção de destinar 425 ha para produzir vinho da casta A, 225 ha para produzir vinho da casta B e 450 ha para produzir vinho da casta C é admissível. Será vértice da região admissível?

[1.25v] **5.** Sejam A matriz do tipo $m \times n$ tal que $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente. Prove que $\{Au_1, Au_2, Au_3\}$ é linearmente independente.