Parte B – Introdução à Teoria da Probabilidade

Noções Preliminares

Definição | Fenómenos aleatórios

Fenómenos aleatórios são fenómenos sujeitos à influência do acaso. São caraterizados pela sua imprevisibilidade e regularidade estatística.

Definição | Experiência aleatória

Experiência aleatória é todo o procedimento que verifica as seguintes propriedades:

– pode repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições ou pelo menos em condições semelhantes;
– a sua realização dá um resultado de entre um conjunto de resultados possíveis;
– cada um dos resultados da experiência é imprevisível mas é possível considerar "estabilidade na frequência da sua ocorrência".

São exemplos de experiências aleatórias:

1. lançamento de dois dados e registo do número de pontos que sai em cada um;
2. lançamento de uma moeda e observação da face que fica voltada para cima;
3. contagem do número mensal de acidentes de automóvel numa autoestrada;
4. registo do tempo de vida de uma pessoa, em anos;
5. registo do tempo de funcionamento de uma máquina até à primeira avaria.

Definição

Espaço de resultados ou espaço amostra é o conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória – representa-se por Ω.

Para os exemplos anteriores tem-se

1. $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$;
2. $\Omega = \{$*'face valor', 'face país'*$\} = \{$'FV','FP'$\} = \{1,0\}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}_0$;
4. $\Omega = \mathbb{N}$;
5. $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Definição

Acontecimento aleatório é qualquer subconjunto do espaço de resultados.

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

- Diz-se que $A \subset \Omega$ se realizou se o resultado, ω, da experiência é um elemento de A, i.e., $\omega \in A$.
- $A \subset B$, diz-se A subacontecimento de B, se e só se a realização de A implica a realização de B;
- A^c ou $\overline{A}$ diz-se acontecimento complementar ou contrário a A, é o conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em A;

- $A \cup B$, diz-se união de A com B, é o acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos.
- AB ou $A \cap B$, diz-se produto ou intersecção, é o acontecimento que se realiza apenas quando ambos os acontecimentos se realizam.
- Os acontecimentos A e B dizem-se mutuamente exclusivos ou incompatíveis se e só se a realização de um implica a não realização do outro, i.e., se e só se $A \cap B = \emptyset$.
- $A - B = A \cap \overline{B}$ diz-se diferença dos acontecimentos A e B. É o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize.
- $\emptyset$ diz-se acontecimento impossível.
- Ω diz-se acontecimento certo.

Algumas propriedades das operações sobre acontecimentos:

Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Distributiva	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Elemento neutro	$A \cap \Omega = A$ $A \cup \emptyset = A$
Elemento absorvente	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \Omega = \Omega$

Definição clássica de Laplace (séc. XIX)

Sob a hipótese de que **todos os casos são igualmente prováveis ou possíveis** (**princípio da simetria**).

Probabilidade de realização de um acontecimento A

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Definição frequencista

Considere-se n repetições de uma experiência aleatória; n_A o nº de vezes que se realizou A. Para n "grande" tem-se para as frequências relativas

$$f_n(A) = n_A/n \approx P(A)$$

A probabilidade do acontecimento A é então interpretada como frequência limite.

$\Omega-$ espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Definição axiomática de Kolmogorov

Probabilidade, P, é uma aplicação que a cada acontecimento de Ω associa um número real satisfazendo o seguinte conjunto de axiomas:

A1) $P(A) \geq 0 \qquad \forall A \subset \Omega;$

A2) $P(\Omega) = 1;$

A3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$. (Axioma das probabilidades totais).

Se Ω é infinito,

A3*) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ se $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$ (Axioma completo das probabilidades totais).

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A) \leq 1$.
5. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
6. Se $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$.
7. Sejam $A_1, ..., A_n$ acontecimentos mutuamente exclusivos então $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Teoria da Prob. | Propriedades da probabilidade

9. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

10. Generalização: Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos quaisquer $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - ... - P(A_{n-1} \cap A_n)$ $+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$ $+... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$.

Exemplo 1

Sejam A, B e C acontecimentos definidos num espaço de resultados Ω tais que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$ e $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$.

A probabilidade de se verificar pelo menos um dos acontecimentos A, B ou C é $P(A \cup B \cup C) =$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{8} - 0 + 0 = \frac{1}{4}.$$

Como $(A \cap B \cap C) \subset (A \subset B)$, $P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap B) = 0$.

Definição

Dados os acontecimentos A e B definidos em Ω, a probabilidade de A se realizar sabendo que B se realizou, ou seja, a probabilidade condicional de A dado B ou probabilidade de A se B representa-se por $P(A|B)$, com $P(B) > 0$ e define-se como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Desta definição resulta o seguinte teorema:

Teorema da probabilidade composta

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$,

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A) = P(B)\ P(A|B)$$

Definição

Dois acontecimentos A e B dizem-se mutuamente independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B).$$

Da definição 9 conclui-se que se A e B são independentes então $P(A|B) = P(A)$ se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$ se $P(A) > 0$. Ou seja, dois acontecimentos são independentes quando a ocorrência de um não influencia a ocorrência do outro.

Teorema

Se A e B são independentes então
A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B e $\overline{A}$ e $\overline{B}$, também são independentes.

Teoria da Prob. | Independência e exclusividade mútua

A independência de acontecimentos é um conceito "quase oposto" a exclusividade mútua. Enquanto que a independência corresponde à *não interferência* nas ocorrências, a exclusividade mútua corresponde ao *impedimento* da ocorrência conjunta.

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$,

A e B independentes $\Rightarrow$ A e B são não mutuamente exclusivos.

A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow$ A e B não são independentes.

(Demonstrar como exercício.)

Teoria da Prob. | Independência de 3 acontecimentos

Sejam A, B, C tais que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e $P(C) > 0$, tem-se,

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(A)P(B|A)P(C|AB) = P(B)P(C|B)P(A|BC) \\ &= P(C)P(A|C)P(B|AC). \end{aligned}$$

(Verificar como exercício.)

Definição | Independência de três acontecimentos

Os acontecimentos A, B e C dizem-se mutuamente independentes ou apenas independentes se e só se

$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ **e** $P(AB) = P(A)P(B)$ **e**
$P(AC) = P(A)P(C)$ **e** $P(BC) = P(B)P(C)$.

Nota: A independência par a par não assegura independência de um conjunto de acontecimentos.

Uma empresa produz concentrado de tomate recorrendo a três processos de fabrico. Sabe-se que 20% da produção de concentrado provém do processo A, 30% do processo B e 50% do processo C. Nalgumas embalagens daquele concentrado tem-se verificado a ocorrência de defeitos. Sabe-se 1% das embalagens provenientes do processo A, 2% das provenientes do processo B e 8% das provenientes do processo C, respetivamente, têm defeito.

1. Qual a percentagem de embalagens, produzidas naquela empresa, que apresentam defeitos?
2. Verifica-se que uma embalagem escolhida ao acaso apresenta defeito. Qual a probabilidade de ter sido fabricada pelo processo A?

A resolução da Pergunta 1. baseia-se no seguinte teorema

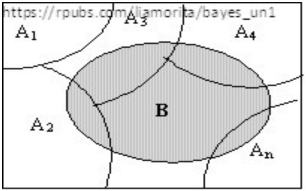
Teorema da probabilidade total

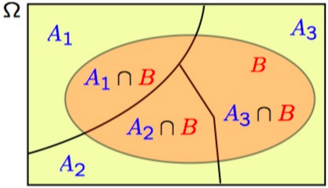
Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos definindo uma **partição de Ω**, i.e.,

$$A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = \Omega \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j, \ i \neq j.$$

Se $P(A_i) > 0$, então para qualquer acontecimento $B \subset \Omega$ tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i).$$





Teoria da Prob. | Exemplo 2

Resolução da Pergunta 1.

A experiência aleatória consiste em escolher ao acaso uma embalagem. A embalagem pode ter sido produzida pelos processo A, B ou C. A embalagem pode ter ou não defeito. Considerem-se os acontecimentos e respetivas probabilidades:
A: embalagem produzida pelo processo A $\rightarrow P(A) = 0.2$
B: embalagem produzida pelo processo B $\rightarrow P(B) = 0.3$
C: embalagem produzida pelo processo C $\rightarrow P(C) = 0.5$
D: embalagem defeituosa $\rightarrow P(D) =?$

Sabe-se que $P(D|A) = 0.01$, $P(D|B) = 0.02$ e $P(D|C) = 0.08$.

Note-se que A, B e C constituem uma partição de Ω (conjunto de todas as embalagens).

Pelo teorema da probabilidade total,

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0.048$$

.

Relativamente à Pergunta 2., pretende-se *atualizar* a probabilidade de um acontecimento *a priori*, à custa da informação *a posteriori*.
O seguinte teorema formaliza a resposta à questão:

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos formando uma partição de Ω , onde $P(A_i) > 0$. Seja B um outro acontecimento de Ω, tal que $P(B) > 0$. Então para $k = 1, ..., n$ tem-se

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k).P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)} = \frac{P(A_k).P(B|A_k)}{P(B)}$$

Resolução da Pergunta 2.

$$P(A|D) = \frac{P(A).P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.048} = 0.041(6).$$

Variável aleatória

Uma variável aleatória permite associar valores numéricos aos resultados de uma experiência aleatória.

Exemplo - associar a soma dos pontos das faces de dados lançados ao acaso.

Definição

Designa-se variável aleatória (v.a.) e costuma representar-se por X, uma função com domínio Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, cujo valor é determinado pelo resultado de uma experiência aleatória, i.e,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = x$$

Variável aleatória

Uma variável aleatória diz-se discreta se assume um conjunto finito ou infinito numerável de valores.

Exemplos:

- número de pintas que sai no lançamento de um dado;
- registo, a intervalos regulares, do número de pessoas em fila espera na caixa de um supermercado;

Uma variável aleatória diz-se contínua se é susceptível de tomar qualquer valor real num dado intervalo, que pode ser a recta real
(definição mais rigorosa será dada à frente)

Exemplos:

- o peso de um indivíduo com uma certa idade;
- o comprimento de uma folha de uma planta.

Variável aleatória | probabilidade

A probabilidade de uma variável aleatória X tomar um conjunto de valores é a probabilidade do acontecimento de Ω cuja transformação por X originou o conjunto de valores.

Por exemplo, na experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um indivíduo, o espaço de resultados Ω é o conjunto de indivíduos e a probabilidade de um indivíduo pesar entre 60Kg e 80Kg, $P(60 < X < 80)$, é a probabilidade de escolher ao acaso um indíviduo ω cujo peso $X(\omega)$ está entre 60 e 80Kg.
Uma forma de associar probabilidades aos valores de uma variável aleatória X consiste na utilização de uma função real de variável real, cujo contradomínio é o intervalo $[0, 1]$, que associa a todo o $x \in \mathbb{R}$ a probabilidade de X tomar valores inferiores ou iguais a x - função distribuição cumulativa de X.

Definição

Chama-se função de distribuição cumulativa ou apenas função de distribuição associada à variável aleatória X e representa-se por F ou F_X, à aplicação

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad \text{tal que} \qquad F(x) = P[X \leq x].$$

Propriedades da f.d.c.:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
   $F(+\infty) = lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
3. F é uma função monótona não decrescente, i.e., dados dois números reais x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, tem-se $F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $F(x)$ é contínua à direita, i.e., $lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.
5. $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$ onde $F(a^-) = lim_{x \to a^-} F(x)$

Variável aleatória | f.d.c. e probabilidade

O conhecimento da f.d.c. $F(.)$ permite calcular qualquer probabilidade:

- $P(X \leq b) = F(b)$ (por definição);
- $P(X < b) = P(X \leq b) - P(X = b) = F(b^-)$;
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a^-)$;
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$;
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$;
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b^-) - F(a)$;
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$;
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$.

Uma variável aleatória X pode ser caraterizada pela sua função distribuição cumulativa ou, em alternativa, pela sua

- função massa de probabilidade se X for uma v.a. discreta ou
- função densidade se X for uma v.a. contínua.

Relembre-se que:

Uma variável aleatória diz-se discreta se toma um número finito ou uma infinidade numerável de valores.

V.a. discreta | função massa de probabilidade

Seja X uma v.a. tomando k valores, $x_1, \ldots, x_k$, cada um deles com probabilidades $p_1, \ldots, p_k$, respetivamente, i.e., $p_i = P[X = x_i]$, $i = 1, \ldots, k$.

Definição

Chama-se função massa de probabilidade da v.a. X à aplicação que a cada valor x_i faz corresponder um valor p_i, tal que

$$p_i = P[X = x_i]$$

A função massa de probabilidade satisfaz:
$p_i \geq 0 \;, i = 1, \ldots, k$ **e** $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$

Nota: Se a v.a. tomar uma infinidade numerável de valores tem-se $p_i \geq 0 \;, \forall i \geq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

V.a. discreta | distribuição de probabilidade

Designa-se distribuição de probabilidade da v.a. X ao conjunto de pares $(x_i, p_i)_{i=1,\ldots,k}$

Habitualmente a distribuição de probabilidade (lei) da v.a. X dispõe-se na forma:

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c|cccc} x_i & x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \hline P[X = x_i] & p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{array}$$

A distribuição de probabilidade da v.a. discreta X relaciona-se com a função distribuição cumulativa F_X através de

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3

O número de aparelhos de micro-ondas vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição cumulativa de X e represente-a graficamente.

b) Determine $P[1 \leq X \leq 3]$. Interprete esta probabilidade.

Resolução:

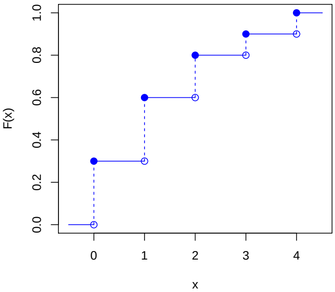
X é uma v.a. discreta que toma apenas cinco valores.

a) Para determinar a f.d.c. é necessário calcular $P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i], \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3

- se $x < 0$, $F(x) = 0$
- se $0 \leq x < 1$, $F(x) = 0.3$
- se $1 \leq x < 2$, $F(x) = 0.3 + 0.3 = 0.6$
- se $2 \leq x < 3$, $F(x) = 0.3 + 0.3 + 0.2 = 0.8$
- se $3 \leq x < 4$, $F(x) = 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.9$
- se $x \geq 4$, $F(x) = 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.1 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6, & 1 \leq x < 2 \\ 0.8, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$



Exemplo 3

No caso de uma variável aleatória discreta a função distribuição cumulativa é uma função em escada, onde os pontos de salto são os valores que a variável assume.

b) $P[1 \leq X \leq 3] = F(3) - F(1^-) = F(3) - F(0) = 0.9 - 0.3 = 0.6$. Em 60% dos dias, são vendidos 1, 2 ou 3 aparelhos de micro-ondas.

Variável aleatória contínua

Definição

Uma variável aleatória diz-se contínua se existe uma função real de variável real, f, não negativa, tal que

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad -\infty < x < \infty$$

Nota:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \\ = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \\ = P(a \leq X < b) = P(a < X < b),\ \forall a < b.\end{aligned}$$

V.a. contínua | função densidade

Definição

A função f designa-se função densidade de probabilidade ou apenas função densidade. Deve verificar as seguintes condições:

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Exemplo 4

O tempo de vida (em anos) de um dado equipamento pode ser modelado por uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\, e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f é de facto uma função densidade.
b) Determine a função de distribuição cumulativa de X e represente-a graficamente.
c) Qual a probabilidade de esse equipamento durar entre 1 e 3 anos?

Exemplo 4

Resolução:

a) Basta verificar que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

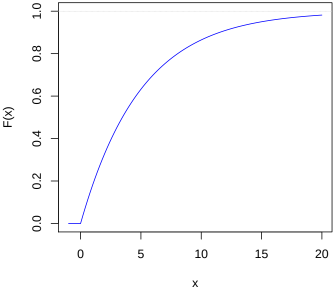
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x) dx \\
&= \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{0} f(t)\, dt + \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} f(t)\, dt \\
&= \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{0} 0\, dt + \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} \frac{1}{5}\, e^{-t/5}\, dt \\
&= 0 + \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-t/5} \right]_{0}^{x} = \lim_{x \to +\infty} -e^{-x/5} + e^{0} = 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

b) A f.d.c. de X é $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$:

- se $x \leq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$
- se $x > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{5}\, e^{-t/5}\,dt = 0 + \left[-e^{-t/5}\right]_0^x$
  $= -e^{-x/5} - (-e^{0})$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/5}, & x > 0 \end{cases}$$



Exemplo 4

No caso de uma variável aleatória contínua a função distribuição cumulativa é uma função contínua, mas não necessariamente derivável $\forall x \in \mathbb{R}$.

(Recorde as propriedades do integral indefinido estudado em Análise Matemática.)

c) $$P[1 < X < 3] = \int_1^3 f(t)\,dt = F(3) - F(1) = \left(1 - e^{-3/5}\right) - \left(1 - e^{-1/5}\right)$$
$$= e^{-1/5} - e^{-3/5} \approx 0.2699.$$

Variáveis aleatórias | valor médio

As variáveis aleatórias têm associados "indicadores" numéricos designados parâmetros.
Parâmetros de uma distribuição são números reais que caraterizam essa distribuição.

Definição | Valor Médio

O valor médio, valor esperado ou esperança matemática de uma variável aleatória X representa-se por $E[X]$, μ_X ou μ e define-se como:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i \quad \text{se } X \text{ é v.a. discreta com distribuição } (x_i, p_i)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx \quad \text{se } X \text{ é v.a. contínua com f. densidade } f(x)$$

Variáveis aleatórias | valor médio

Se X for v.a. discreta com uma infinidade numerável de valores tem-se $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$. Neste caso só existe valor médio se aquela "soma infinita" existir.

Analogamente, no caso contínuo, só existe valor médio, $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$, se o integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx$ for convergente ($\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ absolutamente convergente).

V.a. | valor médio de uma função de X

Se X é uma v.a. e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de variável real, define-se valor médio de $\varphi(X)$ como

$$E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i)\, p_i \quad \text{se } X \text{ é v.a. discreta com distribuição } (x_i, p_i)$$

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx \quad \text{se } X \text{ é v.a. contínua com f. densidade } f$$

Para que exista valor médio exige-se que exista aquela “soma infinita” (no caso de se tratar de uma v.a. discreta com uma infinidade de valores) ou que o integral seja absolutamente convergente.

Propriedades do Valor Médio de uma v.a.

1. Linearidade
   - $E[a] = a$.
   - $E[a + bX] = a + b\, E[X]$.
   - $E[\varphi(X) + \psi(X)] = E[\varphi(X)] + E[\psi(X)]$

2. Positividade

   Se $X \geq 0$, i.e. a variável toma apenas valores ≥ 0, tem-se $E[X] \geq 0$.

3. $$inf(X) \leq E[X] \leq sup(X)$$

Definição

A variância de uma variável aleatória X representa-se por $Var[X]$, σ_X^2 ou apenas σ^2 e define-se como

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$ designa-se desvio padrão de X.

Nota:

$$Var[X] = E[X^2] - \mu^2$$

(Demonstrar como exercício.)

Propriedades

1. $Var[X] \geq 0$
2. $Var[a + b\ X] = b^2\ Var[X]$.

Para o desvio padrão tem-se $\sigma_{(a+b\ X)} = |b|\ \sigma_X$

Exemplo 3 (continuação)

O número de aparelhos de micro-ondas vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

c) Qual o valor esperado do número de aparelhos de micro-ondas vendidos por dia?

d) Se cada micro-ondas é vendido por 85 Euros, qual é a distribuição de probabilidade da receita bruta da venda de micro-ondas por dia.

e) Calcule a receita bruta esperada da venda de micro-ondas por dia.

Exemplo 3 (continuação)

Resolução:

X é uma v.a. discreta que toma cinco valores.

c) $E[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.1 = 1.4.$
Em média são vendidos 1.4 aparelhos de micro-ondas por dia.

d) Sendo R a v.a. que carateriza a receita bruta da venda por dia, $R = 85X$, logo

$$R = \begin{cases} 0 & 85 & 170 & 255 & 340 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

e) $E[R] = E[85X] = 85E[X] = 119$€. A receita bruta é, em média, 119€ por dia.

Exemplo 4 (continuação)

O tempo de vida (em anos) de um dado equipamento pode ser modelado por uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\, e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

d) Qual é o tempo médio de vida deste equipamento?
e) Qual é a variância do tempo de vida deste equipamento?
f) Se o valor de retoma (V em €) do equipamento depender do seu tempo de vida através da expressão $V = 20 - 2X$, qual é o valor médio e a variância da retoma deste equipamento?

Exemplo 4 (continuação)

Resolução:

d) X é uma v.a. contínua.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x.f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x.f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} x.\frac{1}{5}\,e^{-x/5}dx = 0 + \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} t.\frac{1}{5}\,e^{-t/5}\,dt$$

$$\underbrace{=}_{(*)} \lim_{x\to+\infty} \left[-t.e^{-t/5} - 5.e^{-t/5}\right]_0^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{-x.e^{-x/5}}_{\to 0} - 5.\underbrace{e^{-x/5}}_{\to 0} + 0 + 5.e^0\right) = 5$$

$(*)$ utilizou-se o método de primitivação por partes, $P(fg) = Fg - P(Fg')$ com $f = \frac{1}{5}\,e^{-t/5}$ e $g = t$ e portanto $F = Pf = -e^{-t/5}$ e $g' = 1$.

Em média, este equipamento dura 5 anos.

Exemplo 4 (continuação)

e) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ em que

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} x^2.f(x)\ dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{+\infty} x^2.\frac{1}{5}\ e^{-x/5} dx = 0 + \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} t^2.\frac{1}{5}\ e^{-t/5}\ dt$$

$$\underbrace{=}_{(*)} \lim_{x \to +\infty} \left[-t^2.e^{-t/5} - 6t.e^{-t/5} - 30.e^{-t/5} \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x^2.e^{-x/5}}_{\to 0} \underbrace{-6x.e^{-x/5}}_{\to 0} -30.\underbrace{e^{-x/5}}_{\to 0} +0 + 30.e^0 \right) = 30$$

$(*)$ utilizou-se o método de primitivação por partes, $P(fg) = Fg - P(Fg')$ com $f = t.\frac{1}{5}\ e^{-t/5}$ e $g = t$ e portanto $F = Pf = -te^{-t/5} - 5e^{-t/5}$ e $g' = 1$.

Logo, $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 30 - 5^2 = 5(\text{ano})^2$.

f) $E[V] = E[20 - 2X] = 20 - 2E[X] = 10€$ e
$Var[V] = Var[20 - 2X] = Var[-2X] = (-2)^2 Var[X] = 4 \times 5 = 20€^2$.

Definição

O quantil de probabilidade p $(0 < p < 1)$ de uma v.a. X representa-se por χ_p e define-se como o menor valor da variável aleatória X tal que $F_X(\chi_p) \geq p$.

Se $p = 0.5$, $\chi_{0.5}$ designa-se mediana de X e é o menor valor da variável tal que $F_X(\chi_{0.5}) \geq 0.5$.

Nota: Se X é uma v.a. contínua em que F_X não tem patamares (usual),

- o quantil de probabilidade p é o valor χ_p tal que $F_X(\chi_p) = p$, ou seja é a solução da equação $F_X(x) = p$.
- a mediana $\chi_{0.5}$, é a solução de $F_X(x) = 0.5 \iff \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.5$.

Vetores aleatórios

Quando ao resultado de uma experiência aleatória se associam 2 ou mais atributos numéricos, obtêm-se um vetor aleatório.
No caso de serem 2 atributos obtém-se um par aleatório representado frequentemente por (X_1, X_2) ou (X, Y).

Exemplos:

- quantidade de precipitado P e volume V de gás numa reação química, (P, V);
- altura A e diâmetro à altura do peito D do tronco de uma árvore seleccionada ao acaso, (A, D).

Pares aleatórios

Definição

Um par aleatório (X, Y) é uma aplicação

$$
\begin{aligned}
(X, Y) : \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\
\omega &\to (x, y)
\end{aligned}
$$

Vão considerar-se os tipos de pares aleatórios:

- par aleatório discreto $\Rightarrow$ componentes são ambas variáveis aleatórias discretas;
- par aleatório contínuo $\Rightarrow$ componentes são ambas variáveis aleatórias contínuas.

Pares aleatórios discretos

(X, Y) é um par aleatório discreto se toma os valores (x_i, y_j) com probabilidades $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$.

Definição | massa de probabilidade conjunta

Designa-se distribuição de probabilidades conjunta do par (X, Y) aos valores (x_i, y_j) e respectivas probabilidades p_{ij}

p_{ij} é designada função massa de probabilidade conjunta e deve verificar as seguintes condições:

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i, j) \qquad \text{e} \qquad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Pares aleatórios discretos

Um modo de representar a distribuição de probabilidades conjuntas de um par aleatório discreto (X, Y) é na forma de um quadro

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	...	$p_{\cdot n}$	1

$p_{i\cdot} = P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ e $p_{\cdot j} = P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$

são as probabilidades marginais de X e Y respetivamente.

(Adaptado do 1º Teste 2021/22)
4. Um estudante está a estudar intensamente para os seus exames. Para descontrair nos intervalos da sua preparação costuma realizar o seguinte jogo: faz séries de 2, 3 ou 4 lançamentos a um cesto de basquetebol. Seja (X, Y) o par aleatório discreto em que: X é o número de lançamentos realizados numa série e Y é o número de lançamentos acertados numa série. A função massa probabilidade conjunta de (X, Y) é dada por:

X \ Y	0	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
2	0.01	0.02	0.04	0	0	0.07
3	0.02	0.03	0.04	0.04	0	0.13
4	0	0.1	0.2	0.2	0.3	0.8
$p_{\cdot j}$	0.03	0.15	0.28	0.24	0.3	1

- o estudante faz 3 lançamentos e acerta todos em 4% das séries;
- o estudante faz 2 lançamentos em 7% das séries;
- o estudante acerta 4 lançamentos em 30% das séries;
- o estudante acerta todos os lançamentos em 38% das séries.

Pares aleatórios discretos

Definição | probabilidade condicional de X dado Y

A probabilidade condicional de X dado $Y = y_j$ (fixo) com $P[Y = y_j] > 0$ é definida como

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{P[Y = y_j]} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Definição | probabilidade condicional de Y dado X

Do mesmo modo a probabilidade condicional de Y dado $X = x_i$ (fixo) com $P[X = x_i] > 0$ é definida como

$$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{P[X = x_i]} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

Pares aleatórios discretos | Exemplo 5 (cont.)

- nas séries de 2 lançamentos, o estudante acerta os 2 lançamentos em $4/7$ das vezes, acerta 1 lançamento em $2/7$ das vezes e falha os 2 lançamentos em $1/7$ das vezes;
- nas séries em que falha todos os lançamentos, o estudante faz 2 lançamentos em $1/3$ das séries e 3 lançamentos em $2/3$ das vezes;
- o estudante acerta 2 lançamentos em $4/7$ das vezes em que faz 2 lançamentos; em $4/13$ das vezes em que faz 3 lançamentos e em $1/4$ das vezes em que faz 4 lançamentos.

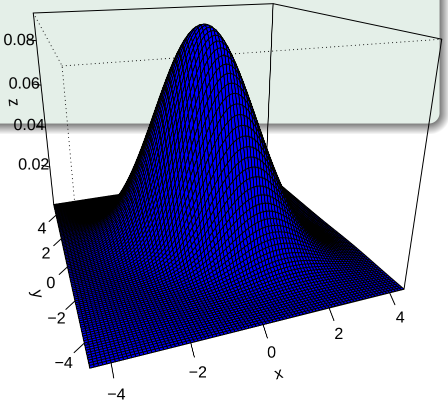
(Verificar os valores a azul como exercício)

Pares aleatórios contínuos

Definição | função densidade conjunta

Um par aleatório (X, Y) diz-se contínuo se existir uma função $f(x, y)$, designada função densidade (de probabilidade) conjunta, que verifica as seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy = 1.$



Pares aleatórios contínuos

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ tem-se $\quad P[(X, Y) \in A] = \iint_A f(x, y) dxdy.$

É o volume da região limitada inferiormente por A no plano $x0y$ e superiormente pelo gráfico de f.

Definição | densidade marginal

densidade marginal de X: $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

densidade marginal de Y: $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

Independência de variáveis aleatórias

Definição

Dado o par aleatório (X, Y) diz-se que as variáveis X e Y são independentes se e só se

- $p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \quad \forall i, j,$ no caso de (X, Y) ser um par aleatório discreto

- $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no caso de (X, Y) ser um par aleatório contínuo.

Valor Médio de uma função de um par aleatório

Definição

Dado o par aleatório (X, Y), e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, define-se

$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)\; p_{ij}\;, \qquad \text{no caso discreto}$$

$$E[g(X,Y)] = \iint_{R^2} g(x,y)\; f(x,y)\; dxdy\;, \qquad \text{no caso contínuo.}$$

Por exemplo, se (X, Y) é um par aleatório discreto:

- $E[X] = \sum_i \sum_j x_i\; p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j\; p_{ij} = \sum_i x_i p_{i.}$
- $E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j\; p_{ij}$

Valor Médio de uma função de um par aleatório

Propriedades do Valor Médio:

1. Aditividade $\quad E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$

2. Se X e Y variáveis aleatórias independentes

$$\Downarrow$$

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Valor Médio de uma função de um par aleatório

Nota:

O recíproco da Propriedade 2 não é verdadeiro.

Se X e Y são v. a.'s com a seguinte distribuição de probabilidades

X $\quad$ Y	-1	0	1
0	0	1/2	0
1	1/4	0	1/4

tem-se $E[XY] = E[X] \times E[Y]$ e no entanto X e Y não são independentes.
(Verificar como exercício.)

Covariância de um par aleatório

Definição

Dado o par aleatório (X, Y) define-se covariância de X e Y como

$$Cov[X, Y] \equiv \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Nota: $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ (Demonstrar como exercício.)

Propriedades

1. $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X, Y]$
2. Se X e Y são v.a.'s independentes $\Longrightarrow Cov[X, Y] = 0$.

   Nota: O recíproco não é verdadeiro.
3. $Cov[a + bX, c + dY] = bd\ Cov[X, Y]$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
4. $|Cov[X, Y]| \leq \sigma_X\, \sigma_Y$, onde σ_X designa o desvio padrão da v.a. X.

Coeficiente de correlação de um par aleatório

Definição

Dado o par aleatório (X, Y) define-se coeficiente de correlação de X e Y como

$$\rho \equiv \rho_{X,Y} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

$(\sigma_X > 0$ e $\sigma_Y > 0)$.

Propriedades

1. $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
2. Se X e Y são v. a. independentes $\implies \rho_{X,Y} = 0$.
3. $\rho_{a+bX,c+dY} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & \text{se } bd > 0 \\ -\rho_{X,Y} & \text{se } bd < 0 \end{cases}$

Modelos (Distribuições) Discretos

Há fenómenos que podem ser modelados por distribuições conhecidas. Algumas das mais importantes distribuições discretas são:

- Distribuição uniforme discreta
- Distribuição de Bernoulli e binomial
- Distribuição hipergeométrica
- Distribuição de Poisson

Distribuição uniforme discreta

Definição

Seja X uma v.a. que toma os valores $x_1,\ x_2\ ,\ \ldots\ , x_k$ com igual probabilidade, isto é

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ 1/k & 1/k & \cdots & 1/k \end{cases}$$

então diz-se que X tem distribuição uniforme discreta,
$X \frown UD(x_1,\ x_2\ ,\ \ldots\ , x_k)$.

Caso particular

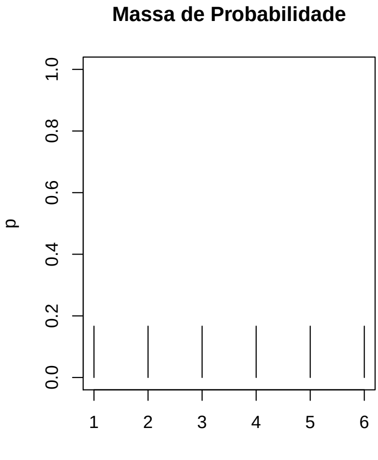
$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{cases}$$

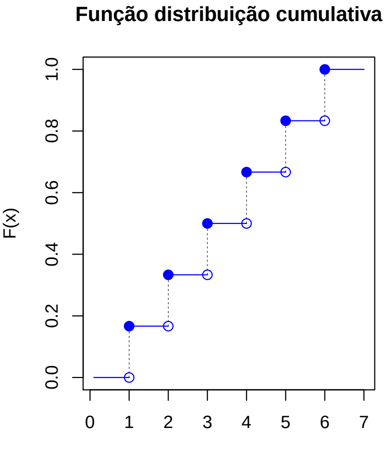
$X \frown UD(1,\ 2\ ,\ \ldots\ , n)$.

Distribuição uniforme discreta | Exemplo 6

Lançamento de um dado equilibrado e observação do número resultante:

$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \cdots & 6 \\ 1/6 & 1/6 & \cdots & 1/6 \end{cases}$$





Distribuição uniforme discreta

Valor médio e variância

$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \qquad Var[X] = \frac{n^2-1}{12}$$

Demonstrar estes resultados como exercício, sabendo que a soma dos n primeiros números naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$ e que a soma dos seus quadrados é $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Para o Exemplo 6, $E[X] = 3.5$ e $Var[X] = 2.9167$.

Distribuição de Bernoulli

Experiência (ou prova) de Bernoulli

Experiência aleatória com apenas dois resultados possíveis, Ω ={"**sucesso**", "**insucesso**"}, em que a probabilidade de sucesso é p e portanto a probabilidade de insucesso é $1-p$.

Distribuição de Bernoulli com parâmetro p

A variável aleatória X que descreve o resultado de uma **única** experiência de Bernoulli, associando o valor **1** a **sucesso** e o valor **zero** a **insucesso**, tem massa de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}$$

X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p, $X \frown Bernoulli(p)$.

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- presença ou ausência de infeção numa planta
- artigo defeituoso ou não defeituoso numa linha de produção
- dia com chuva ou sem chuva
- animal vacinado ou não vacinado

Valor esperado e variância:

$X \frown Bernoulli(p)$

$$E[X] = p \qquad Var[X] = pq, \; q = 1 - p$$

Distribuição Binomial

Provas de Bernoulli são **independentes** quando o resultado de uma prova não interfere no resultado de outra.

Definição

A v.a. X que conta o número de sucessos em n provas de Bernoulli independentes, todas com a mesma probabilidade de sucesso p, tem distribuição binomial com parâmetros n e p, $X \frown \mathcal{B}(n, p)$.

Note-se que $X \frown \mathcal{B}(1, p) \Leftrightarrow X \frown \mathit{Bernoulli}(p)$.

Distribuição Binomial

Exemplo 7.

De uma embalagem de bolbos de túlipa, onde se indica que a taxa de germinação é 40%, colocaram-se 5 bolbos a germinar. A germinação ou não germinação de um bolbo é o resultado de uma experiência de Bernoulli com probabilidade de sucesso (*sucesso* = *germinação*) $p = 0.4$. O número de bolbos que germinam, em 5, pode ser considerado o número de sucessos em $n = 5$ provas de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso $p = 0.4$, $X \frown \mathcal{B}(5, 0.4)$.

- a probabilidade de germinarem todos os bolbos é $P[X = 5] = 0.4^5$
- a probabilidade de não germinar qualquer bolbo é $P[X = 0] = 0.6^5$
- a probabilidade de germinarem 3 bolbos é

$$P[X = 3] = \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2$$

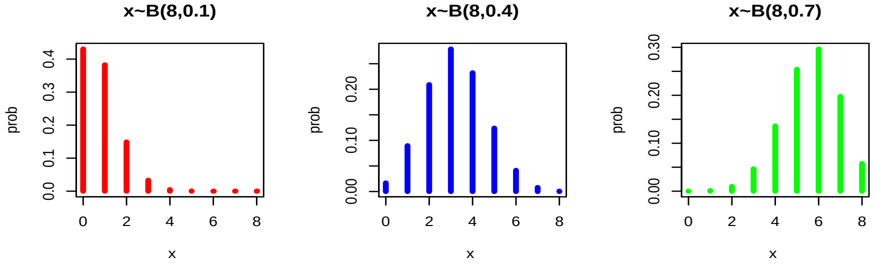
Note que a variável aleatória X apenas pode tomar os valores 0, 1, ..., 5.

Caracterização da v.a. $X \frown \mathcal{B}(n, p)$:

$x = 0, 1, 2, ..., n$ $\longrightarrow$ n^{o} de "sucessos" nas n provas

$P[X = x] = \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$ $\longrightarrow$ probabilidade de ocorrerem x "sucessos"

Para $n = 8$ e $p = 0.1,\ 0.4,\ 0.7$, a função massa de probabilidade é:



Distribuição Binomial

Valor médio e variância

$X \frown \mathcal{B}(n,p)$

$$E[X] = np \qquad Var[X] = npq, \;\; q = 1 - p$$

Relação entre as distribuições do número de sucessos e do número de insucessos

$$X \frown \mathcal{B}(n,p) \;\Rightarrow\; (n - X) \frown \mathcal{B}(n, 1 - p).$$

Distribuição Binomial

Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. $X_1, \cdots, X_k$ são independentes e $X_i \frown \mathcal{B}(n_i, p)$, $i = 1, \cdots, k$, então

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \frown \mathcal{B}\left(n, p\right)$$

com $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Aqui `https://www.statology.org/binomial-distribution-real-life-examples/` encontra exemplos da vida real em que se utiliza a distribuição binomial.

Exemplo 8.

Num lote de 20 latas de feijão enviado a uma mercearia, sabe-se que há 6 ligeiramente amolgadas. Um cliente vai a essa mercearia comprar 5 latas. Qual a probabilidade de levar 2 latas amolgadas?

Neste caso não há independência entre os resultados de cada uma das 5 experiências aleatórias. A probabilidade de a segunda lata estar amolgada depende de a primeira estar ou não amolgada. Não é válida a distribuição binomial!

Continuação do Exemplo 8.

Recorrendo à definição clássica de probabilidade, a probabilidade pedida seria o quociente entre o "número de casos favoráveis" e o "número de casos possíveis":

- há $\binom{6}{2}$ modos de seleccionar 2 latas amolgadas e, para cada um destes, há $\binom{14}{3}$ modos de escolher 3 não amolgadas, para completar as 5;
- ao todo há $\binom{20}{5}$ modos de escolher 5 latas de entre 20;

Portanto a probabilidade de, de entre as 5 latas escolhidas ao acaso, 2 estarem amolgadas (e portanto 3 não amolgadas) é: $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{14}{3}}{\binom{20}{5}}$

Distribuição hipergeométrica

Experiência hipergeométrica

De uma população com N elementos, formada por K "sucessos" e $N - K$ "insucessos", retira-se uma amostra de n elementos **sem reposição**.

Distribuição hipergeométrica

A v.a. X que conta o número de sucessos numa amostra resultante de uma experiência hipergeométrica tem distribuição hipergeométrica com parâmetros N, n e K, $X \frown \mathcal{H}(N, n, K)$

Distribuição hipergeométrica

Função massa de probabilidade

Seja $X \frown \mathcal{H}(N, n, K)$, a probabilidade de

$$\begin{cases} \text{dos} & K \text{ sucessos} & \text{seleccionar} & x \\ \text{dos} & N-K \text{ insucessos} & \text{seleccionar} & n-x \end{cases}$$

é

$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad max(0, n-N+K) \leq x \leq min(n, K)$$

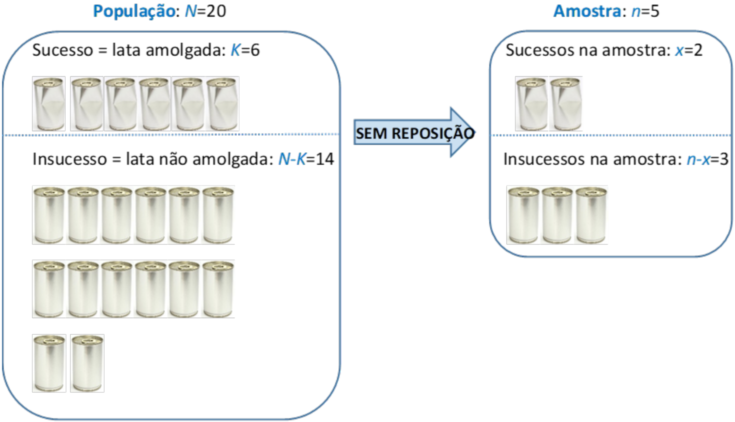
Observação: Quando $N >> n$, a probabilidade de sucesso em cada tiragem sem reposição é aproximadamente constante, logo

Aproximação hipergeométrica $\rightarrow$ binomial ($n < N/10$)

$$\mathcal{H}(N, n, K) \approx \mathcal{B}(n, p), \quad \text{com} \;\; p = K/N.$$

Continuação do Exemplo 8.

X: número de latas amolgadas (sucessos) em $n = 5$ latas retiradas sem reposição de uma população de $N = 20$ latas, das quais $K = 6$ estão amolgadas. $X \frown \mathcal{H}(20, 5, 6)$



Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson permite modelar o número de ocorrências num intervalo de tempo ou numa região do espaço.

Processo de Poisson refere-se ao número de ocorrências num intervalo de tempo ou numa região espacial que verifica as propriedades:

- os números de ocorrências em intervalos de tempo (regiões) disjuntos são independentes;
- a probabilidade de ocorrência num intervalo (região) muito pequeno é proporcional à amplitude (tamanho) do intervalo (região);
- a probabilidade de o número de ocorrências ser superior a um é nula em intervalos (regiões) muito pequenos.

Distribuição de Poisson

O modelo de Poisson é então adequado quando queremos modelar o número de ocorrências num processo cujo comportamento médio é "estável"[2]: número de abelhas que regressam à colmeia durante períodos de 5 minutos, número de glóbulos vermelhos em cada cela de um hemacímetro, número de camarões que se recolhe num camaroeiro de determinado tamanho num tanque de um viveiro, número de ninhos de determinada espécie que existe em determinada área. É a tradução simples da nossa fé na regularidade, e consequente predictibilidade, dos fenómenos. Se pegarmos em punhados de arroz e os "semearmos" enquanto percorremos uma sala, a configuração que esperamos que resulte tem um padrão de aleatoriedade que corresponde a contagens de Poisson. O modelo de Poisson é também uma bitola no que respeita a dispersão, porque $\frac{\mathrm{var}(X)}{\mathbb{E}(X)} = 1$: Se

em: `https://www.instituto-camoes.pt/images/stories/tecnicas_comunicacao_em_portugues/Matematica/Matematica-ModelosdeContagemePadroesdeAleatoriedade.pdf`

Distribuição de Poisson

Seja $\lambda > 0$ o número médio de ocorrências num dado intervalo de tempo (ou numa região do espaço) num processo de Poisson. Então a v.a. que representa o número de ocorrências nesse intervalo de tempo (ou região), tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, $X \frown \mathcal{P}(\lambda)$.

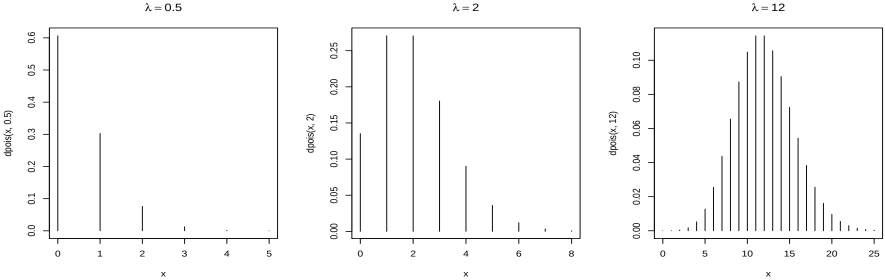
Função massa de probabilidade

$X \frown \mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2.....$$

Distribuição de Poisson

Para $\lambda = 0.5,\ 2,\ 12$, a função massa de probabilidade é:



Distribuição de Poisson

Valor médio e variância

$E[X] = \lambda \qquad Var[X] = \lambda.$

Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. $X_1, \cdots, X_k$ são independentes e $X_i \frown \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \cdots, k$, então

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \frown \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right).$$

Aproximação Binomial $\rightarrow$ Poisson

Se $X \frown \mathcal{B}(n, p)$ com $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$ então $X \approx \mathcal{P}(\lambda)$, com $\lambda = np$.

Exemplo 9. (1º Teste de 2021/22)

Um sismo com magnitude superior a cinco é considerado um "grande sismo". Admita que o número de "grandes sismos" que ocorrem anualmente em Portugal Continental segue uma distribuição de Poisson. De acordo com o Catálogo Sísmico de Portugal Continental, o número médio anual desses "grandes sismos" é 0.7. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrerem dois ou mais"grande sismos" num ano;

b) o número total de "grandes sismos" em 8 anos ser inferior a seis;

c) em 20 anos, existirem 10 anos sem "grandes sismos".

Resolução:

a) Seja X a v.a. que representa o número de "grandes sismos" que ocorrem em Portugal num ano, $X \frown \mathcal{P}(0.7)$.
$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - F_X(1) \underbrace{=}_{\text{tabela}} 1 - 0.844 = 0.156;$

Exemplo 9 (continuação da resolução):

b) seja X_i a v.a. que representa o número de "grandes sismos" que ocorrem em Portugal no ano i, $i = 1, \cdots, 8$, $X_i \frown \mathcal{P}(0.7)$. Admitindo que o número de "grandes sismos" é independente de ano para ano, $Y = \sum_{i=1}^{8} X_i \frown \mathcal{P}(8 \times 0.7)$. $P[Y < 6] = F_Y(5) = 0.512$ (tabela da Poisson com $\lambda = 5.6$);

c) seja W a v.a. que presenta o número de anos, em 20, em que não ocorrem "grandes sismos"; esta v.a. conta sucessos em $n = 20$ provas de Bernoulli independentes (admitindo que a ocorrência de "grandes sismos" é independente de ano para ano) em que a probabilidade de sucesso em cada prova é a probabilidade de não ocorrer um "grande sismo", $p = P[X = 0] = \frac{e^{-0.7} 0.7^0}{0!} = 0.497$. Assim, $W \frown \mathcal{B}(20, 0.497)$. Pede-se $P[W = 10] = F_W(10) - F_W(9) \approx 0.5881 - 0.4119 = 0.1762$ (os valores de F_W foram lidos na tabela da binomial com $n = 20$ e $p = 0.5$).

Modelos (Distribuições) Contínuos

As principais distribuições contínuas incluem:

- Distribuição uniforme contínua
- Distribuição normal

Distribuição uniforme contínua

Definição

Uma v.a. contínua diz-se ter distribuição uniforme ou rectangular no intervalo (a, b) e representa-se por $X \frown \mathcal{U}(a, b)$ se a função densidade de probabilidade (f.d.p.) é da forma:

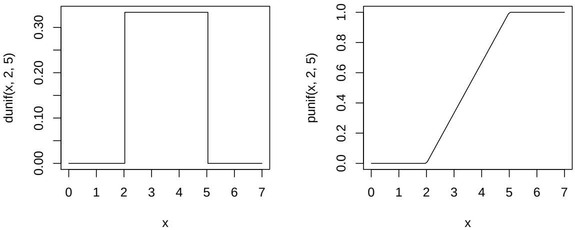
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \leq a \text{ ou } x \geq b. \end{cases}$$

A função distribuição cumulativa correspondente é (verificar como exercício):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

Distribuição uniforme contínua

Gráficos da função densidade e da função distribuição cumulativa de uma v.a. $X \frown \mathcal{U}(2, 5)$:



Valor médio e variância

$X \frown \mathcal{U}(a, b)$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição normal ou de Gauss

É a distribuição contínua mais importante:

- é um modelo adequado para representar muitos fenómenos da vida real, nomeadamente características biométricas, erros de medição, etc;
- surge como a distribuição limite da soma (e da média) de muitas v.a. em certas condições (Teorema Limite Central, mais à frente);
- algumas distribuições (como a binomial e a Poisson) podem ser bem aproximadas pela normal.

Poderá ter interesse em ver este vídeo
`https://www.probabilitycourse.com/videos/chapter4/video4_9.php`

Distribuição normal ou de Gauss

Função densidade

A v.a. contínua X tem distribuição normal ou de Gauss com parâmetros μ e σ, $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se a sua f.d.p. é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$

Os parâmetros da distribuição normal são:

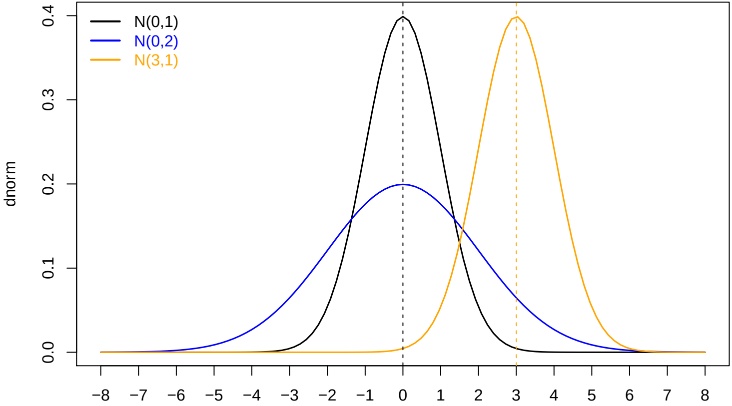
- $\mu \in \mathbb{R}$, o valor médio ou valor esperado de X
- $\sigma > 0$, o desvio padrão de X.

Portanto $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow E[X] = \mu; \quad Var[X] = \sigma^2$.

Distribuição normal ou de Gauss

A função densidade

- tem a forma de sino com máximo em $x = \mu$;
- é simétrica em relação à reta vertical $x = \mu$: $f(\mu - x) = f(\mu + x)$;
- tem pontos de inflexão em $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.



Distribuição normal ou de Gauss

Normal reduzida

O caso particular $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ corresponde à distribuição normal reduzida, $Z \frown \mathcal{N}(0,1)$, com f.d.p.

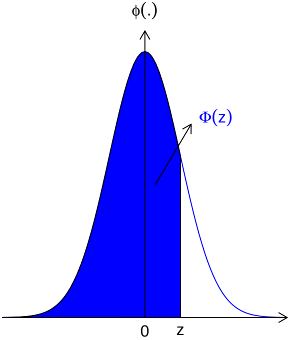
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

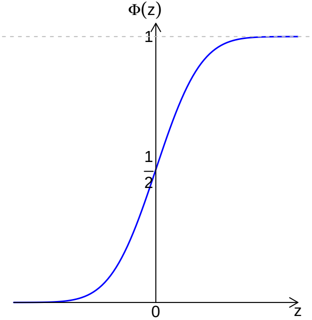
A função distribuição cumulativa é

$$\Phi(z) = P[Z \leq z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

$\Phi(z)$ é uma função não elementar; para o cálculo de probabilidades de uma v.a. normal é necessário recorrer a *software* ou tabelas.

Distribuição normal reduzida





Propriedades:

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Distribuição normal ou de Gauss

Teorema

Seja $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ e $Y = a + bX$ então $Y \frown \mathcal{N}(a + b\mu,\ |b|\sigma)$.

O seguinte resultado permite usar as tabelas da distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ para calcular probabilidades de uma $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

Corolário

Seja $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, então a v.a. $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ tem distribuição normal reduzida, i.e., $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \frown \mathcal{N}(0, 1)$.

Distribuição normal ou de Gauss

Teorema da estabilidade da soma de normais

Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a. normais independentes, tais que
$X_1 \frown \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \quad X_2 \frown \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2), \quad \cdots, \quad X_n \frown \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n).$
A v.a. $X_1 + X_2 + ... + X_n$ tem distribuição normal de parâmetros (μ, σ)
com $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$ e $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}$

Corolário

Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a. normais independentes e semelhantes, i.e., tendo todas o mesmo valor médio μ e a mesma variância σ^2.

As variáveis aleatórias soma e média, definidas respetivamente como $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, têm distribuição normal assim definida

$$S_n \frown \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \qquad \text{e} \qquad \overline{X}_n \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

Exemplo 10

Uma vacaria tem uma produção diária de leite que se admite seguir uma lei normal com $\mu = 950$ litro e $\sigma = 50$ litro.

a) Qual a probabilidade de se ter uma produção inferior a 1000 litros?

b) Qual a percentagem de dias em que a produção ultrapassa a produção média em mais de 100 litros?

c) Se na região existe outra vacaria, com uma produção diária que se admite normal com $\mu = 900$ *l* e $\sigma = 40$ *l*, funcionando independentemente da primeira, qual a probabilidade de num dado dia a produção total das duas vacarias ser superior a 1800 litros?

Exemplo 10 (resolução)

X: v.a. que representa a produção (litro) diária de leite,
$X \frown \mathcal{N}(950, 50)$

a) $P[X < 1000] = \Phi\left(\dfrac{1000 - 950}{50}\right) = \Phi(1) = 0.84134$ (Tabela)

b) $P[X > 950 + 100] = P\left[\dfrac{X - 950}{50} > \dfrac{100}{50}\right] = 1 - \Phi\left(\dfrac{100}{50}\right) =$
$1 - \Phi(2) \underbrace{=}_{\text{Tabela}} 1 - 0.97725 = 0.02275$

c) $Y \frown \mathcal{N}(900, 40)$
X, Y independentes $\Rightarrow \quad X + Y \frown \mathcal{N}(950 + 900,\ \sqrt{50^2 + 40^2})$
$P[X + Y > 1800] = 1 - \Phi\left(\dfrac{1800 - 1850}{\sqrt{50^2 + 40^2}}\right) \approx 1 - \Phi(-0.78) =$
$\Phi(0.78) = 0.7823$ (Tabela)

Exemplo 10 (Tabela da normal reduzida)

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169

O TLC estabelece que a **soma** ou **média** de um *elevado* número de v.a. independentes e identicamente distribuídas (com qualquer distribuição, *inclusive* discreta), têm distribuição **aproximadamente normal**:

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

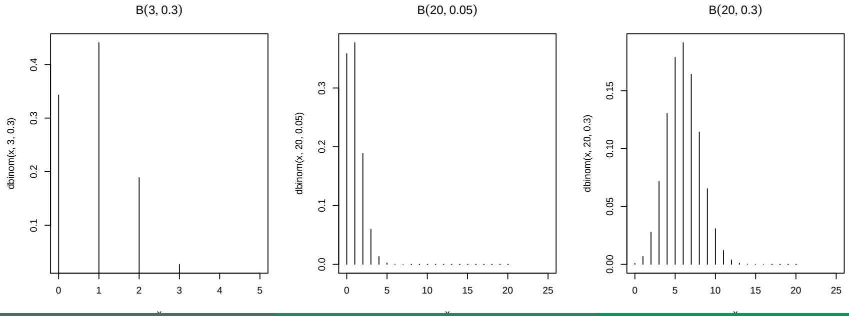
Quando n é "grande", a soma $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e a média $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ verificam:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Teorema de De Moivre ($\mathcal{B}inomial \rightarrow \mathcal{N}ormal$)

Seja X uma v.a. com distribuição $\mathcal{B}(n, p)$ com valor médio $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$. Então quando n é elevado e p afastado de 0 e de 1, em concreto $np > 5$ e $nq > 5$,

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Aplicações do Teorema Limite Central

Teorema: aproximação $\mathcal{P}oisson \to \mathcal{N}ormal$

Seja $X \frown \mathcal{P}(\lambda)$. Quando $\lambda \to \infty$ então $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Regra prática:
A aproximação é considerada boa para $\lambda \geq 12$.

Correção de continuidade

Quando se aproxima a distribuição binomial ou Poisson (discretas) pela distribuição normal (contínua) surge a seguinte desconformidade:

$X \frown \mathcal{B}$ ou $X \frown \mathcal{P} \Longrightarrow P[X \leq k] \neq P[X < k]$, k inteiro

mas
$X \frown \mathcal{N} \Longrightarrow P[X \leq k] = P[X < k]$

Para ultrapassar esta desconformidade, garantindo que $P[X \leq k] + P[X > k] = 1$, utiliza-se a correção de continuidade que consiste em representar cada número inteiro k pelo intervalo $\left(k - \frac{1}{2},\ k + \frac{1}{2}\right)$. Assim,

$$P[X < k] = P\left[X \leq k - \tfrac{1}{2}\right] \approx \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P[X \leq k] = P\left[X \leq k + \tfrac{1}{2}\right] \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right)$$

Correção de continuidade

Notas:

- as aproximações referidas são apenas necessárias quando se recorre a valores tabelados da função distribuição cumulativa da v.a. discreta (com limitações dos valores dos parâmetros);
- a correção de continuidade não garante uma melhor aproximação no sentido numérico;
- dispondo de *software* que tem implementada a função distribuição cumulativa das distribuições discretas para quaisquer valores dos seus parâmetros, não se utilizam as aproximações referidas.