

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

4 de janeiro de 2023 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrônicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número:

Nome:

[8.25v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 - \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq \frac{3}{2}$, o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = -1$ e $\beta = -2$ ou $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = 3$, o sistema é PI.

Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq -2$ ou $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta \neq 3$, o sistema é IMP.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente. $\alpha \neq -1, \frac{3}{2}$

ii) $b \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. $\alpha = -1$ e $\beta \neq -2$ ou $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta \neq 3$

iii) $\mathcal{N}(A)^\perp$ define um plano de $\mathbb{R}^3$. $\alpha = -1$ ou $\alpha = \frac{3}{2}$

c) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e determine o ângulo entre b e v_2 . $\frac{\pi}{6}$

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = -1$.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

$\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : -5b_1 + b_2 - 3b_3 = 0\}$. Geometricamente representa um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetor normal $(-5, 1, -3)$.

e) Escreva o vetor $(-2, 5, 5)$ como combinação linear dos vetores de uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Se considerarmos, por exemplo, a base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathcal{C}(A)$, tem-se $(-2, 5, 5) = v_1 + 3v_2$.

f) Mostre que $\mathcal{C}(A) = \langle (-2, 5, 5), (-2, 2, 4) \rangle$.

[4v] 2. Considere $U = \langle (1, 0, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 3, -1, -2) \rangle$ e $b = (-1, 0, 1, 2)$.

a) Determine uma base ortogonal para U . Por exemplo, $\{(1, 0, 2, 1), (1, 2, 0, -1)\}$

b) Calcule $\text{proj}_U(b)$. $(0, -1, 1, 1)$

c) Mostre que $\text{proj}_U(b + u) = \text{proj}_U(b) + u$ para todo o $u \in U$.

[4v] 3. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [u_1 \ u_2 \ u_3]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Determine o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o paralelepípedo definido por u_1, u_2 e u_3 tem volume 4. $\alpha = 4$ ou $\alpha = 2$

No que se segue considere $\alpha = 3$.

- b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
 $0, 2$ e 5 , todos com multiplicidade algébrica um.
- c) Determine um vetor próprio unitário de A .

Por exemplo, o vetor próprio $\frac{\sqrt{3}}{3}(-1, -1, 1)$, associado ao valor próprio 0 .

- d) Existirá uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A ? Sim.

[2.5v]

4. Uma adega pretende plantar vinha das castas A, B, e C para produzir vinho. A produção média anual e o valor da venda de vinho de cada casta encontram-se na tabela seguinte:

	Produção (nº pipas/ha)	Valor da venda (€/pipa)
Casta A	20	500
Casta B	20	800
Casta C	18	500

Sabe-se que a área total a destinar à produção de vinho e a área a destinar à produção de vinho da casta C não podem ultrapassar, respetivamente, 1100 ha e 450 ha e que pelo menos um hectare deve ser destinado à casta B por cada 2 hectares que são destinados à casta C. A adega pretende determinar a área a destinar a cada casta de modo a maximizar a receita anual.

- a) Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

$$\min \quad z = 20 \times 500 x_A + 20 \times 800 x_B + 18 \times 500 x_C$$

$$\text{s.a} \quad x_A + x_B + x_C \leq 1100$$

$$x_C \leq 450$$

$$2x_B - x_C \geq 0$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

em que x_A, x_B e x_C são as áreas (em ha) a destinar à produção de vinho das castas A, B e C, respetivamente.

- b) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\min \quad z = 20 \times 500 x_A + 20 \times 800 x_B + 18 \times 500 x_C$$

$$\text{s.a} \quad x_A + x_B + x_C + f_1 = 1100$$

$$x_C + f_2 = 450$$

$$2x_B - x_C - f_3 = 0$$

$$x_A, x_B, x_C, f_1, f_2, f_3 \geq 0$$

- c) Verifique que a opção de destinar 425 ha para produzir vinho da casta A, 225 ha para produzir vinho da casta B e 450 ha para produzir vinho da casta C é admissível. Será vértice da região admissível? Sim.

[1.25v]

5. Sejam A matriz do tipo $m \times n$ tal que $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente. Prove que $\{Au_1, Au_2, Au_3\}$ é linearmente independente.