INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA[1]

1ª Chamada de Matemática 1 - 10 de Janeiro de 2023 - Duração 2h

UMA RESOLUÇÃO

---

1. (a) Como $\hat{B} = 90^o$, o lado oposto a $\hat{B}$ chama-se hipotenusa, AC, e os outros dois lados catetos. Como ABC é um triângulo rectângulo, podemos definir $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ à custa dos comprimentos do cateto oposto a α, BC, do cateto adjacente a α, AB, e da hipotenusa AC: $\sin\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{\overline{AC}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \overline{BC}$. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\overline{BC}}$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ e $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

   (b) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

   $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\overline{BC}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{BC}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   $P = 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3}$.

2. (a) $x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow 1x - 1y + 0z = 0$ é o plano perpendicular ao vector $(1,-1,0)$ e passa no ponto (0,0,0); $z = 0$ é o plano XOY (plano perpendicular ao vector (0,0,1) e passa no ponto (0,0,0)).

   (b) (0,0,0), dado que é solução do sistema.

   (c) Como se quer um plano perpendicular a r, um vector com a direcção de r é perpendicular ao plano. Um vector com a direcção de r é obtido fazendo a diferença entre dois pontos da recta, por exemplo, $u = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0)$. Assim, um plano perpendicular a r terá a equação $1x + 1y + 0z = d$, com $d \in \mathbb{R}$. Se quisermos que o plano passe no ponto (2,3,4), por exemplo, $d = 1(2) + 1(3) + 0(4) = 5$. Logo, a equação de um plano perpendicular a r pode ser $x + y = 5$.

   (d) $d = \|b - \mathrm{proj}_r b\|$

   $\mathrm{proj}_r b = \mathrm{proj}_{(1,1,0)}(1,2,3) = \dfrac{(1,1,0)|(1,2,3)}{(1,1,0)|(1,1,0)}(1,1,0) = \dfrac{3}{2}(1,1,0) = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 0)$.

   $b - \mathrm{proj}_r b = (1,2,3) - (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$
   Logo, $d = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 9} = \sqrt{\dfrac{19}{2}} = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

3. (a) $AB^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

[1] Esta resolução não foi escrita ao abrigo do Acordo Ortográfico.

(b) Como $AB^T = 6I$, então $\frac{1}{6}AB^T = \frac{1}{6}6I \Leftrightarrow A\frac{1}{6}B^T = I \Leftrightarrow A(\frac{1}{6}B^T) = I$. Como ambas as matrizes, A e $\frac{1}{6}B^T$, são quadradas e $A(\frac{1}{6}B^T) = I$, podemos afirmar que $A^{-1} = \frac{1}{6}B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Não. $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$. Ou seja, o sistema $Ax = b$ tem uma única solução, $x = A^{-1}b$, e, portanto, é possível e determinado.

(d) $\begin{cases} (x_1, x_2, x_3)|((2,0,0) & = & 0 \\ (x_1, x_2, x_3)|((1,2,1) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_3 & = & -2x_2 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$. Por exemplo, fazendo $x_2 = 1$, obtemos o vector (0,1,-2).

4. $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} -1+k & 1+k & 1-k & -1-k \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -1+k & = & 1 \\ 1+k & = & 3 \\ 1-k & = & -1 \\ -1-k & = & -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k & = & 2 \\ k & = & 2 \\ k & = & 2 \\ k & = & 2 \end{cases}$. Logo, $k = 2$.

5. $BC = B\left(3A^2 - 5A - I\right) = 3BA^2 - 5BA - B$

$CB = \left(3A^2 - 5A - I\right)B = 3A^2B - 5AB - B$. Como A e B são permutáveis, $AB = BA$. Logo, $3A^2B = 3AAB = 3ABA = 3BAA = 3BA^2$. Assim, $3A^2B - 5AB - B = 3BA^2 - 5BA - B$ e, portanto, $BC = CB$, ou seja, B e C são permutáveis.

6. Variáveis de decisão:

x - quantidade de fertilizante A (ton) a produzir mensalmente

y - quantidade de fertilizante B (ton) a produzir mensalmente

$$
\begin{aligned}
&\min\ Z = 50x + 20y && (1)\\
&\text{s.a}\\
&30x + 40y \geq 150(x+y) && (2)\\
&x + y \leq 5 && (3)\\
&x \geq 1 && (4)\\
&x, y \geq 0. && (5)
\end{aligned}
$$

A expressão em (1) é a quantidade total de resíduos sólidos gerada. A restrição (2) garante uma receita superior ou igual a 150 euros por tonelada. A restrição (3) impede que a produção dos dois fertilizantes exceda a capacidade. A restrição (4) limita inferiormente a quantidade de fertilizante A a produzir. E a restrição (5) descreve a natureza das variáveis.

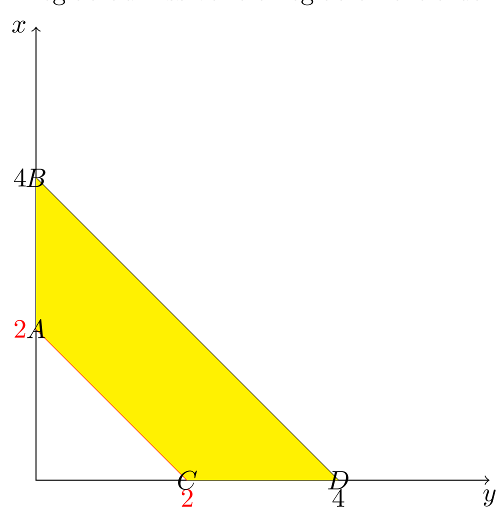
7. (a) $x + y = 2$ é a recta que passa nos pontos

x	y
0	2
2	0

$x + y = 4$ é a recta que passa nos pontos

x	y
0	4
4	0

A região admissível é a região amarela da figura



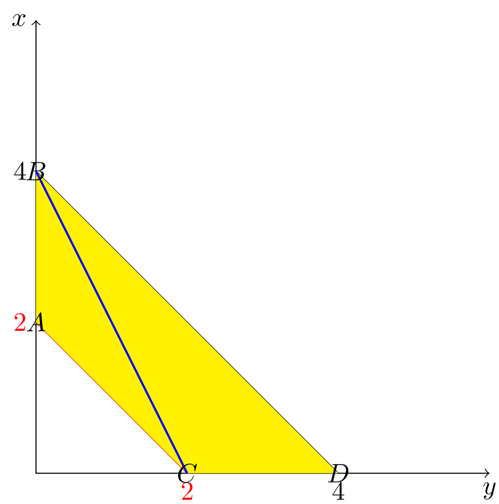
Os vértices são

Vértice (x, y)
A (0,2)
B (0,4)
C (2,0)
D (4,0)

(b) O valor da função objectivo da solução $x = 1$ e $y = 2$ é $Z = 2(1)+2 = 4$. Portanto, as soluções admissíveis que têm o valor da função objectivo igual a 4 estão na recta $2x + y = 4$. Esta recta passa nos pontos

x	y
0	4
2	0

e o conjunto das soluções admissíveis que têm o valor da função objectivo igual a 4 constitui, geometricamente, o segmento de recta a azul.



(c) Se a região admissível de um problema de PL é limitada (e não vazia), então existe um vértice da região admissível que é solução óptima do problema. Podemos usar este resultado aqui. Assim, a solução ótima é o vértice D com o valor da função objectivo igual a 8.

Vértice (x, y)	$Z = 2x + y$
A (0,2)	2
B (0,4)	4
C (2,0)	4
D (4,0)	8 $\leftarrow$